ECUACIONES

DIFERENCIALES ORDINARIAS APLICADAS I

x(t)

A

Ae^{-pt}

$-Ae^{-pt}$

-A

ALBERTO ERNESTO GUTIERREZ BORDA



ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS APLICADAS I

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS APLICADAS I

ALBERTO ERNESTO GUTIÉRREZ BORDA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS APLICADAS I

AUTOR:

© ALBERTO ERNESTO GUTIÉRREZ BORDA

EDITADO POR:

© 2022 Instituto de Investigación y Capacitación
Profesional del Pacífico para su sello editorial IDICAP PACÍFICO
Av. La Cultura N° 384 Puno - Perú

Primera edición digital, febrero 2022

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2022-03819

ISBN N° 978-612-48816-3-3

Libro digital disponible en:
https://idicap.com/omp/index.php/editorial/catalog

DOI: https://doi.org/10.53595/eip.004.2022

Foto de portada
Pintura "Huarango seco" - Carlos Tenorio
Foto de contraportada
Pintura "Cañón de los perdidos" Ica - Carlos Tenorio



ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS APLICADAS I

ALBERTO ERNESTO GUTIÉRREZ BORDA

https://orcid.org/0000-0001-6260-2419

Universidad Nacional San Luis Gonzaga
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática
Ica, Perú

alguborda@yahoo.es
egutierrez@unica.edu.pe



DEDICATORIA

A mis padres:
Gaudencio y Maximiliana
gracias siempre

A mi esposa Carmen, a mis hijos:
Elvis, Renzo y Benedicta

PRÓLOGO

Los distantes orígenes de este libro se encuentran en las notas de mis clases que escribí y reescribí por varios años. Las huellas son los constantes borrones que hice cada cierto tiempo que me reencontraba con estos temas, puede no gustarte la forma de presentación, pero puse el mejor esfuerzo posible, tampoco es algo nuevo ya que existen muchas referencias al final del libro; estaré a gusto si al menos sirve para un grupo de estudio, es imposible evitar que se deslice errores. Algunas preguntas frecuentes que nos hacemos, ¿Qué es exactamente una ecuación diferencial? ¿Dónde y cómo se originaron, cuál es su utilidad? ¿Qué se hace con ellas, cómo se analiza los resultados de tales manipulaciones? Estas interrogantes señalan pautas a seguir, estudiar aspectos: teóricos, metodológico y diversos campos de aplicaciones.

Hay hechos históricos que inspiran; por ejemplo, la obtención de la ecuación de la recta tangente a una curva determinada, fue uno de los problemas latentes hasta fines del siglo XVII a vísperas del nacimiento del cálculo diferencial. En adelante el trabajo consistía en resolver el problema inverso, encontrar diferentes métodos en vista de que muy pocas ecuaciones pueden resolverse por reglas concretas. Transcurridos un poco más de dos siglos aun no es posible establecer reglas generales para todo tipo de ecuaciones diferenciales El mundo físico está en permanente cambio, también corresponde a las ecuaciones diferenciales estudiar este cambio como fenómeno natural, las leyes que rigen, buscar un modelo matemático que gobierna sus leyes e interpretarla.

Las ecuaciones diferenciales en general, constituyen la esencia matemática para la modelización y comprende un gran número de eventos en: físicas, economía, ingeniería, química, biología, fisiología y economía, medicina, matemática, movimiento de cuerpos celestes tales como planetas, lunas y satélites artificiales, astronomía, entre otros. Por tanto, las ecuaciones diferenciales desempeñan un papel crucial para su estudio.

El contenido está pensando sobre todo para facilitar la comprensión por parte del estudiante, brindándole la técnica básica para enfrentar a un problema. Razón por la cual se incluyen numerosos ejemplos y se detallan cuidadosamente la mayoría de las demostraciones. Si bien la abstracción es importante, no tiene sentido estudiar ecuaciones diferenciales sin hacer referencias a problemas prácticos.

Quiero expresar mi aprecio: al cuerpo Docentes del Departamento de Matemática; al director de la oficina general de investigación interdisciplinaria; al Rector de la Universidad Nacional San Luis Gonzaga, por cristalizar mi año sabático y permitió un final feliz para culminación del presente libro; al físico Mg. Carlos Tenorio, por las pinturas alusivas al tema y a mi querida Ica; agradecimiento especial se merece el Fondo Editorial IDICAP PACÍFICO por la publicación en versión digital; son muchas las personas que leyeron el manuscrito, sus comentarios fueron valiosos; a todos gracias.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1

NATURALEZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

1.1 INTRODUCCIÓN

Antes de iniciar con el estudio de conceptos, es recomendable un poco de historia, hay un hecho muy importante y, es el nacimiento del cálculo, que tiene que ver con la obtención de la recta tangente a una curva determinada, este fue un problema que se plantearon los matemáticos hasta finales del siglo XVII. A partir de los descubrimientos de Newton y Leibniz, este problema de obtener la recta tangente a cualquier curva pasó a ser un problema resuelto. Sin embargo, surgió el problema inverso que resultó muy complicado de resolver. Se trataba de obtener la curva, conocidas las ecuaciones de las rectas tangentes en cada uno de sus puntos, se podría hoy decir la integración de una ecuación diferencial de primer orden; aunque después se generalizó a una ecuación de orden n.

Podemos señalar que las ecuaciones diferenciales ordinarias aparecen formalmente con el cálculo. En 1693 Huygens habla explícitamente de ecuaciones diferenciales; el término "*aequatio differentiali*" fue usado por Leibniz en 1679 para denotar la relación entre las diferenciales dx y dy y dos variables x e y, lo cual se conserva hasta los tiempos de Euler (1768 – 1770), hay registros de que un 11 de noviembre de 1675, Leibniz escribió la ecuación $\int y dy = \frac{y^2}{2}$, lo cual se asume como un acto donde Leibniz idea el signo de integral.

El problema de la integración de ecuaciones diferenciales era parte de un problema más general, esto es, el problema inverso del análisis infinitesimal. En un inicio se centraba a la solución de ecuaciones de primer orden, sobre todo con separación de variables para su integración, por tanto, debe haber sido el primer método.

Ya a finales del siglo XVII los hermanos Bernoulli Jacques y Johan introducen términos como el de "*integrar una ecuación diferencial*" con lo cual formaliza el proceso de separación de variables. En 1692 Johan Bernoulli licencia otro método donde usa un factor integrante. En 1724, el matemático italiano J. F.

Riccatti (1676 – 1754) estudia la ecuación $\frac{dx}{dt}+ax^2=bt^n$, con a, b, n constantes, determinando la integral en funciones elementales de esta, de aquí que lleva su nombre, y que fue extendida a ecuaciones de tipo $x''=P(t)x^2+Q(t)x+R(t)$, (Vera, 1959).

En el año 1768 Euler publica su obra "*Institutiones*", sirviendo esta como primera teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, primer orden, separable, homogéneas; segundo orden, lineales, reducción de orden, orden superior; método de la serie de potencia. En 1766 D´Alembert, aporta con la solución general de una ecuación no homogénea, una cierta solución particular y la solución general de la correspondiente ecuación homogénea. Lagrange (1736 – 1813) en 1774, usa variación de parámetros y principios de superposición.

A inicios del siglo XIX se desarrolló una fase en la se trataba de demostrar algunos hechos dado por válido durante el siglo anterior. La época de rigor llegaría en 1820 con Cauchy quien prueba la existencia de soluciones de la ecuación diferencial $x'=f(t,x)$. En 1890 Picard estableció un método de aproximaciones sucesivas, esto permitió establecer con precisión el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales de orden n. J. H. Poincaré (1854 – 1912); Alexander Liapunov (1857 – 1918), estudiaron ciertos sistemas físicos y dio origen al problema de investigar las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial a partir de su "*expresión propia*", dando inicio a la teoría cualitativa de las ecuaciones deferenciales, esto es a la mitad del siglo XIX, lo cual marca la última fase del desarrollo de la teoría sobre ecuaciones diferenciales que transcurre hasta nuestros días, (Benites, 2008).

Naturalmente, que durante el siglo XVIII, todo descubrimiento matemático exigía cierto protocolos a cumplir, como: (1) cada concepto matemático debería ser definido de manera explícita sobre la base de otros conceptos bastante conocida; (2) las pruebas de los teoremas debían ser justificada en cada uno de sus etapas o sobre un teoremas previamente probado; (3) las definiciones y axiomas escogidas tenían que ser amplias, lo suficiente para validar resultados ya existentes; (4) la intuición (física o geométrica) no era un criterio válido para desarrollar o validar una prueba matemática.

En 1890 Picard estableció un método de aproximaciones sucesivas que permite establecer con precisión teorema de existencia unicidad de las ecuaciones diferenciales de orden n. Posteriormente, Cauchy, al tratar de demostrar el mismo teorema para sistemas de ecuaciones diferenciales introdujo la notación vectorial; los conceptos matriciales introducido por Cayley ayudó mucho a otros, caso Jacobi

usando matriz diagonalizable. Más tarde Jordán introdujo su forma canónica para sistemas lineales de ecuaciones donde la matriz no es diagonalizable. Con la investigación de Poincaré respecto de la estabilidad y periodicidad de las soluciones del sistema solar, conduce a sistemas no lineales, a finales del siglo XIX había muchos resultados en el terreno cualitativo, mejorados también por Liapunov y Bendixson.

La mayoría de las teorías de las ecuaciones diferenciales fue desarrollada a lo largo de tres siglos, desde finales XVII hasta principios del siglo XIX. En aquel tiempo, con todos los problemas del cálculo surgían con la necesidad de matematizar algún fenómeno físico. El cálculo encontraba siempre nuevas aplicaciones en la astronomía y la mecánica. El problema de la fundamentación del cálculo diferencial se hizo cada vez más actual, tanto que llegó a ser el problema de mayor importancia para el siglo XVIII, (Nápoles, 2002).

El tema tiene que ver con una gran cantidad de problemas, así como una variedad de leyes físicas, que se modelan por una ecuación diferencial. Para tener una idea de esta aplicación, la segunda ley de Newton dice $F = ma$. Es decir, la aceleración que adquiere un cuerpo es proporcional a la fuerza total que actúa sobre dicho cuerpo. Si asumimos que un cuerpo de masa m cae libremente, es decir la única fuerza es su peso, entonces $F = mg$, donde g es la aceleración gravitatoria que podemos suponer constante $g = 9{,}8\, m/s^2$. Si denotamos con x la posición de un cuerpo, se tiene que la velocidad es $v = \frac{dx}{dt}$ y la aceleración $\frac{d^2x}{dt^2}$ de manera que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg,$$

es decir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\ .$$

Por otro lado, si a este modelo, le agregamos el efecto de rozamiento que ejerce el aire sobre el cuerpo, este efecto está dado por una fuerza opuesta al desplazamiento proporcional a la velocidad, y así la ecuación que modela el movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt},$$

son las expresiones de ecuaciones diferenciales que modelan un fenómeno y se verán muchos más adelante.

1.2 CONCEPTOS BÁSICOS

Definición 1.1. Se llama ecuación diferencial, a una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes respecto de una o más variables independientes.

Definición 1.2. Se denomina ecuación diferencial ordinaria, a una ecuación diferencial en las que aparecen derivadas ordinarias de una o más variable dependientes respecto a una única variable independiente.

Definición 1.3. Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales, a una ecuación diferencial en las que aparecen derivadas de una o más variable dependiente respecto a más de una variable independiente.

Definición 1.4. Se denomina *orden* de una ecuación, al orden de la derivada más alta que aparece en ella.

Definición 1.5. Cuando una ecuación diferencial es racional e integral con respecto a todas las derivadas, la potencia a la cual está elevada la derivada de mayor orden se llama *grado*.

Ejemplo 1. La ecuación

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0,$$

es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden y primer grado.

Ejemplo 2. La ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \ ,$$

es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, que modela la ecuación de la catenaria obtenida a partir de las leyes de Newton.

Ejemplo 3. La ecuación

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^n,$$

es una ecuación diferencial de primer orden, es conocido como la *ecuación de Bernoulli*, que modelaba un problema de determinar el movimiento de un proyectil en un medio cuya resistencia es proporcional a una potencia de la velocidad.

Ejemplo 4. La ecuación

$$\frac{d^5x}{dt^5} + 7\frac{d^3x}{dt^3} + 6x = sent,$$

es una ecuación diferencial ordinara de quinto orden y primer grado, donde x es la variable dependiente y t es la variable independiente.

Ejemplo 5. La ecuación

$$\frac{\partial V}{\partial x} + 2\frac{\partial V}{\partial y} = 2V,$$

es una ecuación diferencial parcial de primer orden y primer grado, aquí V es la variable dependiente, mientras que x e y son las variables independientes.

Ejemplo 6. La ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

es una ecuación diferencial parcial de segundo orden y primer grado donde x, y, z son las variables independientes. Esta es la ecuación *diferencial de Laplace*.

Ejemplo 7. La ecuación diferencial de segundo orden

$$t^2 x'' + t x' + (t^2 - n^2)x = 0,$$

denominada ecuación de *Bessel*, es una de las más importantes de la física matemática, que depende de un parámetro n, el *orden* (bueno también señala el orden) de la ecuación diferencial, aunque es posible que n sea un número complejo.

Ejemplo 8. Las ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$L\frac{d^2 q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t),$$

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt},$$

modelan a *circuitos eléctricos simples*, donde I es la intensidad de la corriente; E, fuerza electromotriz; R, resistencia; L, inductancia; C, capacitancia; q, carga.

Ejemplo 9. La ecuación diferencial de segundo orden

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0,$$

es la ecuación de un péndulo linealizado.

Ejemplo 10. La ecuación

$$a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial V}{dt},$$

es la ecuación diferencial parcial de segundo orden y grado uno, y representa a la *ecuación de calor*.

Ejemplo 11. La ecuación diferencial de segundo orden

$$s'' = -g sen\left(\frac{S}{L}\right)$$

es la ecuación del *movimiento pendular*.

Ejemplo 12. La ecuación

$$a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 V}{dt^2},$$

es la ecuación diferencial parcial de segundo orden y grado uno, y representa a la *ecuación de onda*.

Observación. En consideración a la definición (1) no se incluyen en las clases de ecuaciones diferenciales a las identidades relativas a derivadas como:

$$\frac{d}{dx}(u.v) = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}.$$

Definición 1.6. Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n, en la variable dependiente y con variable independiente x, es una ecuación expresada en la forma:

$$a_o(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = Q(x) \qquad \mathbf{(1)}$$

donde las funciones $a_i(x) \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ son llamadas *coeficientes* de la ecuación diferencial ordinaria.

Si $Q(x) = 0$, la ecuación diferencial ordinaria lineal se dice *homogénea*. Si $Q(x) \neq 0$, la ecuación diferencial ordinaria lineal se dice *no homogénea*. Si los coeficientes $a_i(x)$ no depende de x, se dice que la ecuación diferencial ordinaria lineal es de *coeficientes constantes*. De lo contrarios se dice que ella es de *coeficientes variables*.

En el caso que $a_o(x) \neq 0$ se puede dividir la ecuación diferencial ordinaria (1) por $a_o(x)$. La ecuación diferencial que se obtiene

$$\frac{d^ny}{dx^n} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{a_n(x)}{a_0(x)}y = \frac{Q(x)}{a_0(x)} \qquad \mathbf{(2)}$$

Se dice que está *normalizada*. Si una ecuación diferencial ordinaria no es de la forma (1) se dice que es una ecuación diferencial ordinaria *no lineal*.

Observación. Para ver la linealidad de una ecuación es bueno observar los siguientes hechos:

i) Solamente aparece la primera potencia de la variable dependiente y con sus derivadas.
ii) No figuran productos de y con sus derivadas, ni de las derivadas entre sí.
iii) No aparecen funciones trascendentes de y ni de sus derivadas.

Ejemplo 13. La ecuación

$$y(1 + (y')^2) \quad = 4,$$

es una ecuación diferencial no lineal, de orden 1; esta ecuación modela la curva braquistócrona.

Ejemplo 14. La ecuación

$$\frac{d^5y}{dx^5} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 1 + senx,$$

es una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea con coeficientes variables.

Ejemplo 15. La ecuación

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{d^2y}{dx^2} - 6y^3 = 0,$$

es una ecuación diferencial ordinaria y no lineal, pues la variable dependiente es de potencia 3.

Ejemplo 16. La ecuación

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 9y = 0,$$

es una ecuación diferencial no lineal, pues $\frac{dy}{dx}$ es de tercera potencia.

Ejemplo 17. La ecuación

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + Ky = Fsen(wt),$$

es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, Euler se ocupó de esta ecuación diferencial, y por allí surge el *fenómeno de resonancia*.

Ejemplo 18. La ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 9y^3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x$$

es no lineal, pues incluye producto de la variable dependiente por su segunda derivada.

Ejemplo 19. La ecuación diferencial ordinaria

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} + (t^2 - \alpha^2)x = 0,$$

es lineal, homogénea, de segundo orden, no está normalizada; tiene como variable dependiente a x, variable independiente a t. Representa a la *ecuación diferencial de Bessel*.

Ejemplo 20. La ecuación diferencial ordinaria

$$2xy' + kcos(x)y = tan(2x).$$

es lineal de orden uno con coeficientes variables, no homogénea ni normalizada.

Ejemplo 21. La ecuación

$$K^4\frac{d^4y}{dx^4} = y\,,$$

es una ecuación diferencial de orden 4. Esta ecuación expresa un problema de desplazamiento transversal de una barra elástica fijado un extremo y libre el otro, *estudiado por Euler*.

Ejemplo 22. La ecuación diferencial ordinaria

$$(1-t^2)\frac{d^2x}{dt^2}-2t\frac{dx}{dt}+p(p+1)x=0,$$

es lineal, homogénea, de segundo orden, no está normalizada; tiene como variable dependiente a x, variable independiente a t. Representa a la *ecuación diferencial de Legendre*.

Ejemplo 23. La ecuación

$$y'''-4y'=0,$$

es lineal de orden 3 con coeficientes constantes y normalizada. La variable dependiente es y, sin embargo, la variable independiente puede ser cualquier letra distinta de y.

Ejemplo 24. El modelo $mx''+kx+cx^3=F_0\cos(wt)$ es una ecuación diferencial de segundo orden no lineal, representa un sistema de resorte y masa, no amortiguado y periódicamente forzado y se denomina la *ecuación diferencial de Duffin*.

Ejemplo 25. La ecuación

$$y''=\frac{1}{a}\sqrt{(y')^2+1},$$

es una ecuación diferencial no lineal y, representa a la Catenaria.

PROBLEMAS 1.1

1. Indique el orden, grado, variable dependiente e independiente, normalidad y linealidad de las siguientes ecuaciones diferenciales:
   a) $t\frac{dx}{dt}-\cos(t)\,x=2.$
   b) $e^xy''-\tan(x)\,y'=2sen(2x).$
   c) $x^3\frac{d^3y}{dx^4}-2\cos(x)\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^4.$
   d) $4y'''-2y''=\cot(5t^3).$
   e) $y'=\frac{y-x}{y+x}.$
   f) $x''=\frac{y+x'+1}{x}.$
   g) $\frac{dy}{dt}=\sqrt{1+2\frac{dy}{dt}}.$
   h) $x'+\tan(t)\,x=\ln(t).$
   i) $(y')^3+y''-5y=0.$
   j) $y''=\frac{1}{a}\sqrt{(y')^2+1}$

k) $r\frac{dr}{d\theta}-e^{\theta}=1.$

2. Determine la ecuación diferencial de todas las circunferencias que tiene su centro sobre el eje Y, y sea tangente al eje X. Clasifica su grado, orden y linealidad.
3. Encuentre la ecuación diferencial que pasa por los puntos (0,0) y (2,0). Clasifique la ecuación diferencial en orden, grado y linealidad.

1.3 NATURALEZA DE LAS SOLUCIONES

Definición 1.7. Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de orden n

$$F(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\dots,\frac{d^ny}{dx^n})=0 \qquad (3)$$

i) Sea f una función real definida $\forall x\in I=\langle a,b\rangle$ de clase $C^n,\forall x\in I$. La función f es una solución *explícita* de la ecuación diferencial en el intervalo I si satisface:

a) $F\left[x,f(x),f'(x),\dots,f^{(n)}(x)\right]$ está definida $\forall x\in I$.

b) $F\left[x,f(x),f'(x),\dots,f^{(n)}(x)\right]=0,\forall x\in I.$

Es decir la sustitución de y con sus derivadas por $f(x)$ en (3), reduce esta ecuación a una identidad en I.

ii) Se dice que una relación $g(x,y)=0$ es una solución *implícita* de (3), si esta relación define al menos una función real f de la variable x en I, de manera que esta función sea una solución explícita de (3) en I.

Ejemplo 26. La función f definda $\forall x\in\mathbb{R}$ mediante $f(x)=sen(2x)-3\cos(2x)$, es una solución explícita de la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vemos que f está definida y tiene derivada segunda válido $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=2\cos(2)+6sen(2x),$$

$$f''(x)=-4sen(2x)+12\cos(2x),$$

sustituyendo en la en la ecuación diferencial se obtiene,

$$(-4sen(2x)+12\cos(2x))+4(sen(2x)-3\cos(2x))\equiv 0,$$

se reduce a una identidad válida $\forall x\in\mathbb{R}$, luego $f(x)$ es una solución explícita de la ecuación diferencial.

Ejemplo 27. La relación $x^2+y^2-16=0$ es una solución implícita de la ecuación $x+y\frac{dy}{dx}=0$ en el intervalo $I=\langle -4,4\rangle$. En efecto, la relación $x^2+y^2-16=0$ define dos funciones reales $g_1(x)$ y $g_2(x)$ dadas por

$$g_1(x) = \sqrt{16 - x^2} \;\; \text{y} \;\; g_2(x) = -\sqrt{16 - x^2},\; \forall x \in \langle -4,4 \rangle,$$

ambas son soluciones explícitas de la ED en este intervalo. Para $g_1(x) = \sqrt{16 - x^2}$ se tiene $g'_1(x) = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$, $\forall x \in \langle -4,4 \rangle$, que remplazando en la ED se obtiene

$x + \sqrt{16 - x^2}\left(\frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}\right) = 0$, en razón que $x - x \equiv 0, \forall x \in \langle -4,4 \rangle$, luego g_1 es una solución explícita en $\forall x \in \langle -4,4 \rangle$.

Observación. En general se debe tener cuidado con las soluciones implícitas. Si consideramos la relación $x^2 + y^2 + 16 = 0$, efectuando la diferenciación implícita, respecto de x se obtiene

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

pero no podemos inferir que $x^2 + y^2 + 16 = 0$ sea una solución implícita de esta ecuación, ya que sería falso asegurar que a partir de esto la relación defina alguna función que sea solución explícita de la ED, está claro que $y = \pm\sqrt{-16 - x^2}$ no define ninguna función real en ningún intervalo.

Ejemplo 28. Demuestra que $x_1(t) = 0$ y $x_2(t) = t^2 sen(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial $t^2x'' - 4tx' + (t^2 + 6)x = 0$ y además cumplen las condiciones $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$.

Solución. Como $x_1(t) = 0$ es nula se cumple de inmediato, también $x_1(0) = 0 = x'_2(0)$. Para $x_2(t) = t^2 sen(t)$ derivamos dos veces

$$x'_2(t) = 2tsen(t) + t^2cos(t)$$
$$x''_2(t) = 2sen(t) + 4tcos(t) - t^2sen(t),$$

luego sustituir en la ecuación diferencial

$$t^2[2sen(t) + 4tcos(t) - t^2sen(t] - 4t[2tsen(t) + t^2\cos(t)] +$$
$$(t^2 + 6)t^2sen(t) \equiv 0,$$

también se cumple condiciones $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$. Sin embargo, para aplicar el teorema de existencia y unicidad, la ecuación diferencial se escribe en la forma

$$x'' - \frac{4}{t}tx' + \left(1 + \frac{6}{t^2}\right)x = 0.$$

Observando esta ecuación, se deduce que el teorema no se puede aplicar porque $p(t) = -\frac{4}{t}$ y $q(t) = 1 + \frac{6}{t^2}$, no están definidas para $t = 0$. Por lo tanto, no hay contradicción en la solución de dos soluciones pasando por el mismo punto con la misma pendiente en ese punto.

PROBLEMAS 1.2

1. Demuestre que $x_1(t) = 0$ y $x_2(t) = t^2 sen(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial $t^2x'' - 4tx' + (t^2 + 6)x = 0$ y además cumplen las condiciones $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$.
2. Verifique que las funciones $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - y' = 6y$.
3. Demuestre que la función $x = sen(2t) + \cos(2t)$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$.
4. Determine el valor de n de manera $y = x^n$ sea solución de la ecuación diferencial
   $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6x\frac{dy}{dx} + 8y = 0$.
5. Compruebe que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas:
   a) $y = 2 + \sqrt{x^2 + 1}$ de la ecuación $(1 + x^2)y' + xy = 2x$.
   b) $t = x\int_0^t sen(s^2)ds$ de la ecuación diferencial $tx' = -x + x^2 sen(t^2)$.
   c) $y = x\sqrt{1 - x^2}$ de la ecuación diferencial $yy' = x - 2x^3$.
   d) $x = tln(t),\ y = t^2(1 + 2\ln(t))$, de la ecuación diferencial $y' ln\left(\frac{y'}{4}\right) = 4x$.
   e) $y = ln(e^x + c)$ de la ecuación $e^y y' = e^x$.
   f) $x = \sqrt{t^2 - ct}$ de la ecuación diferencial $2txdx = (t^2 + x^2)dt$.
   g) $2cx = c^2 - y^2$ de la ecuación diferencial $y = -2xy' = y(y')^2$.

1.4 ELIMINACIÓN DE CONSTANTES ARBITRARIAS

Existe un camino para llegar a las ecuaciones diferenciales que es útil para intuir la clase de soluciones que se esperan. Dada una solución que involucran constantes arbitrarias, entonces por eliminación de esas constantes llegaremos a una ecuación satisfecha por la relación original.

Ejemplo 29. Eliminar las constantes arbitrarias c de la relación $y = ke^{-4x}$.
Solución. Ya que tenemos una sola constante k que debe ser eliminada, se obtiene la derivada,

$$y' = -4(ke^{-4x})$$

que sustituyendo se obtiene la ecuación diferencial

$$y' + 4y = 0. \blacksquare$$

Ejemplo 30. Eliminar las constantes arbitrarias de $y = k_1x^2 + k_2e^{-2x}$.

Solución: De

$$y = k_1x^2 + k_2e^{-2x}\,, \qquad \text{(i)}$$

ya que dos constantes deben ser eliminadas, se obtiene las dos derivadas

$$y' = 2k_1x - 2k_2e^{-2x} \qquad \text{(ii)}$$

$$y'' = 2k_1 + 4k_2e^{-2x}\,, \qquad \text{(iii)}$$

sustituyendo (iii) en (ii), $\frac{y''}{2} + y' = (2x+1)k_1,\ k_2e^{-2x} = \frac{y''-2k_1}{4} = \frac{y''}{4} - \frac{y''+2y'}{4(2x+1)}$

ahora en (i) $y = \left(\frac{y''+2y'}{2(2x+1)}\right)x^2 + \frac{y''}{4} - \frac{y''+2y'}{4(2x+1)}$

ordenando se obtiene la ecuación diferencial

$$(2x^2 + 8x + 3)y'' + (4x^2 - 2)y' - 4(2x+1)y = 0. \blacksquare$$

Ejemplo 31. Eliminar las constantes arbitrarias k_1, k_2 de la solución $y = k_1e^{-2x} + k_2e^{3x}$.

Solución. Ya que las dos constantes deben ser eliminadas, calculamos las dos derivadas,

$$y' = -2k_1e^{-2x} + 3k_2e^{3x} \qquad \text{(i)}$$

$$y'' = 4k_1e^{-2x} + 9k_2e^{3x} \qquad \text{(ii)}$$

combinando apropiadamente las tres ecuaciones

$$-6y = -6k_1e^{-2x} - 6k_2e^{3x}$$

$$-y' = 2k_1e^{-2x} - 3k_2e^{3x}$$

$$y'' = 4k_1e^{-2x} + 9k_2e^{3x}$$

se obtiene la ecuación

$$y'' - y' - 6y = 0. \blacksquare$$

Otro método para obtener la ecuación diferencial de este ejemplo es usando determinantes, dado que es un sistema con dos incógnitas las constantes arbitrarias, tienen soluciones si

$$\begin{vmatrix} -y & e^{-2x} & e^{3x} \\ -y' & -2e^{-2x} & 3e^{3x} \\ -y'' & 4e^{-2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 0$$

debido que e^{-2x}, e^{3x} no pueden ser ceros, entonces se reduce a

$$\begin{vmatrix} -y & 1 & 1 \\ -y' & -2 & 3 \\ -y'' & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ de donde } y'' - y' - 6y = 0.$$

El uso de determinantes puede ser útil para la eliminación de constantes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ de una función de la forma,

$$y = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} + \cdots + k_n e^{r_n x}\ ,$$

lo cual nos lleva a una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes y homogéneas,

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-2} \frac{d^2 y}{dx^2} + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0,$$

con a_j con $j \in \{0,1,2, \dots, n\}$ son constantes.

PROBLEMAS 1.3

1. Forme la ecuación diferencial de las siguientes familias de curvas:
   a) $x(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2}$.
      R. $t^2 x'' + 4tx' + 2x = 0$.
   b) $x(t) = c_1 + c_2 \ln(t)$.
      R. $tx'' + x' = 0$.
   c) $x(t) = ct$.
      R. $tx' + x = 0$.
   d) $x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 sen(2t)$.
      R. $x'' + 4x = 0$.
   e) $x^2 + t^2 = c$.
      R. $t + xx' = 0$.
   f) $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$.
      R. $x'' - 4x = 0$.
   g) $x = c_1 t + c_2 Lnt$
      R. $(t^2 - t^2 Lnt)x'' + tx' - x = 0$.
   h) $y(x) = c_1 x + c_2 e^{2x}$.
      R. $(2x - 1)y'' - 4xy' + 4y = 0$.
   i) $x(t) = c_1 t + c_2 e^{-2t}$.
      R. $(1 + 2t)\frac{d^2 x}{dt^2} + 4t\frac{dx}{dt} - 4x = 0$.
   j) $x(t) = c_1 t^2 + \frac{c_2}{t}$.
      R. $t^2 x'' - 2x = 0$.
   k) $x(t) = c_1 t + c_2 t^2$.
      R. $t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0$.
2. Escribe la ecuación de todas las rectas no verticales del plano.
   R. $x = mt + b$, $x'' = 0$.
3. Halle la ecuación diferencial que representa a la familia de circunferencias que tiene su centro en el eje Y.

R. $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$.

4. Escribe la ecuación diferencial de todas las parábolas del plano XOY con el eje vertical.
R. $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0, y'' = 0$.

1.5 FAMILIA DE CURVAS

Una relación que contiene un parámetro, así como una o ambas coordenadas de un punto en un plano, representa una familia de curvas, una curva correspondiente a cada parámetro.

Ejemplo 32. Encuentre la ecuación diferencial de la familia de parábolas, que tiene sus vértices en el origen y sus focos sobre el eje X.
Solución: En general, sabemos que la ecuación de la parábola con esta característica es

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

donde el vértice es $(h,k) = (0,0)$ es decir la familia de parábolas es $y^2 = 4px$.
Para eliminar la constante 4p, escribimos $\frac{y^2}{x} = 4p$ luego diferenciamos en ambos miembros $\frac{2xyy' - y^2}{x^2} = 0$,
con $x \neq 0$ se tiene la ecuación $2xy' - y = 0$. ■

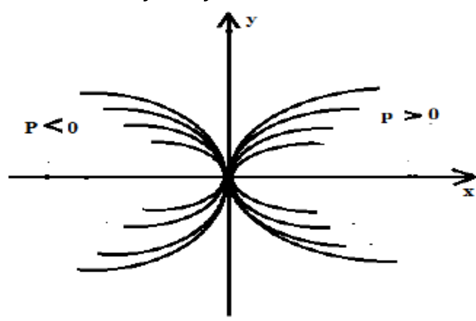


Figura 1.2. Familia de parábolas.

Ejemplo 33. Encuentre la ecuación diferencial de la familia de circunferencias que tienen sus centros sobre el eje X.
Solución: El centro de la circunferencia es el punto $(h,k) = (h,0)$ que está en el eje X, su radio "r" puede ser de cualquier magnitud, luego la ecuación es

$$(x-h)^2 + y^2 = r^2$$

que tiene dos parámetros h, r que debemos eliminar, diferenciando en ambos miembros se obtiene

$$2(x-h)+2y.y'=0, \text{ es decir } x-h+y.y'=0,$$

diferenciando nuevamente, $1-y'.y'+y.y''=0$, luego la ED buscada es no lineal

$$y.y''-(y')^2+1=0.$$

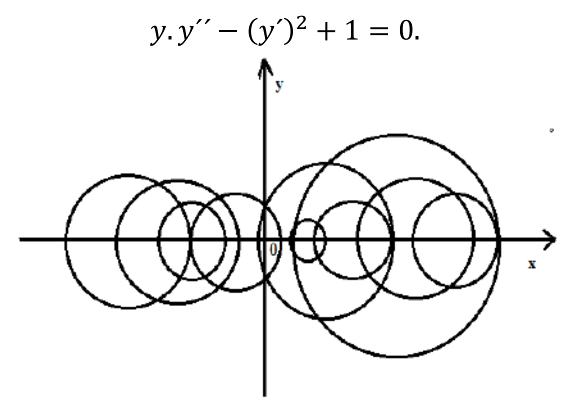


Figura 1.2. Familia de curvas.

PROBLEMAS 1.4

1. Determine la ecuación diferencial que representa la familia de circunferencias que tiene su centro sobre el eje Y.
   R. $xy''-y'-(y')^3=0$.
2. Determine la ecuación diferencial de la familia de parábolas con vértice en $(h,3)$ y eje focal paralelo al eje X.
3. Escribe la ecuación diferencial de todas las circunferencias que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(4,0)$; tiene sus centros en el punto $(2,k)$, $k \in \mathbb{R}$.
   R. $(y^2-x^2+4x)y'+2(x-2)y=0$.
4. Halle la ecuación diferencial de la familia de rectas que pasa por el origen.
5. Obtener la ecuación diferencial de todas las circunferencias de radio 4 y su centro sobre la recta $x-y=0$.
   R. $(y-x)^2(1+(y')^2)=16(1+y')^2$.
6. Halle la ecuación diferencial de la familia de elipses que tiene su centro en el punto $(1,1)$.
7. Determine la ecuación diferencial de la familia de parábolas que tiene vértice en origen de coordenadas y eje focal el eje Y.

8. Halle la ecuación diferencial de la familia de rectas que pasa por el punto $(1, -2)$.
9. Halle la ecuación diferencial de la familia de rectas que pasa por el punto $(2, y_0)$ y con ángulo de inclinación $\alpha = 60°$.
10. Determine la ecuación diferencial de la familia de elipses cuyo centro es el punto (0,0).

1.6 CAMPOS INTEGRALES E ISOCLINAS

Sea $F(x, y, y') = 0$ una ecuación diferencial de primer orden que se puede expresar de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \, . \qquad (1)$$

Esta función asocia a cada punto del plano (x, y) donde está definida la función $f(x, y)$ el valor y'; que es la pendiente o coeficiente angular de la tangente a la curva integral en ese punto. Por lo tanto la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ se llama *campo de direcciones*.

El campo de direcciones se representa como un conjunto de segmentos; cada uno de ellos pasa por el punto (x, y) y tiene una pendiente y'. Resolver una ecuación diferencial se puede interpretar como calcular una curva cuya tangente en cada punto tenga la misma dirección que el campo de direcciones en ese punto; entonces para facilitar este cálculo se introducen las isóclinas.

Definición 1.8. Se denomina *isóclina* al lugar geométrico de los puntos del plano en los que las tangentes a las curvas integrales tienen la misma dirección.

La familia de isóclinas de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ está determinada por la ecuación $f(x, y) = k$, siendo k un parámetro real. Dibujando la familia de isóclinas para valores de k próximos entre sí, es posible trazar de forma aproximada las curvas integrales de la ecuación diferencial. La isóclina $f(x, y) = 0$ señala donde pueden estar situados los puntos máximos y mínimos de las curvas integrales. También se puede calcular el lugar geométrico de los puntos de inflexión, para esto hay que calcular $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, es decir $\frac{df(x,y)}{dx} + \frac{df(x,y)}{dy} . y' = 0$.

Una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial (1) es,

$$y = F(x, k),$$

donde k es una constante arbitraria o parámetro de la familia, de esta manera se tiene una familia de curvas en plano XY, que se conoce como *curvas integrales* (método de Isóclinas).

Ejemplo 34. Obtener la solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = 3x.$$

Solución. La función $f(x, y) = 3x$ representa la pendiente en $(x, y), \forall x \in IR$. Para algunos valores de x se tiene,

Si $x = 0$, entonces la pendiente es $0 = m$, es decir $\theta = 0$, $(tan\theta = 0)$,

Si $x = \frac{1}{3}$, entonces la pendiente es $1 = m$, es decir $\theta = 45°$,

Si $x = -\frac{1}{3}$, entonces la pendiente es $-1 = m$, es decir $\theta = 135°$, así sucesivamente, siguiendo las tangentes se puede dibujar las curvas, ver gráfica.

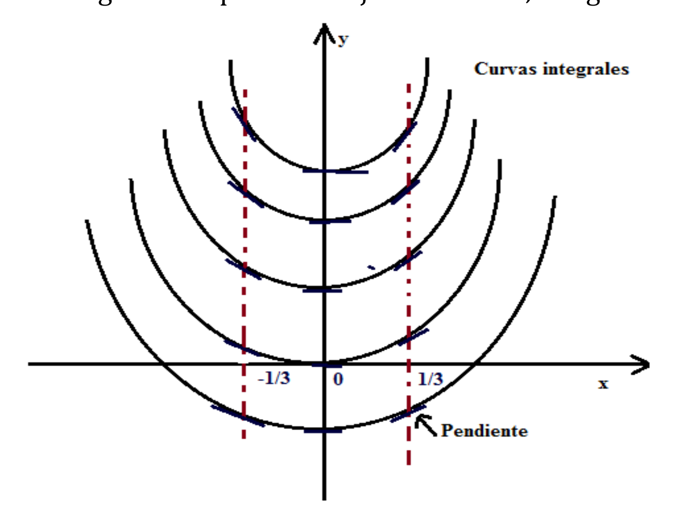


Figura 1.3: Isóclina y curvas integrales.

El comportamiento de las curvas son las curvas: $f_0(x) = \frac{3}{2}x^2$; $f_1(x) = \frac{3}{2}x^2 + 1$; $f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2$; … ; $f_k(x) = \frac{3}{2}x^2 + k$; donde k es una constante arbitraria o parámetro definidas $\forall x \in \mathbb{R}$, son soluciones de la ecuación diferencial, cada una son curvas integrales.

Observación. Una solución en forma cerrada es cuando una solución explícita f se expresa como suma finita de funciones elementales conocida.

Definición 1.9. Una *solución particular* de una ecuación diferencial es lo que se obtiene de la solución general para valores concretos de las constantes $c_1, c_2, c_2, \dots, c_n$.

Definición 1.10. Una *curva integral* es la gráfica de una solución particular de una ecuación diferencial.

Definición 1.11. Una *solución singular* es una función que satisface la ecuación diferencial y que sin embargo no se obtiene de la solución general para ningún valor de las constantes.

La envolvente del haz de curvas integrales determinado por las gráficas de las soluciones particulares es una solución singular.

Definición 1.12. Resolver o integrar una ecuación diferencial de orden n supone calcular la solución general, si no se han dado condiciones iniciales y cuando estos se dan entonces hallar la solución particular que las satisfaga.

Ejemplo 35. La ecuación diferencial $y^2(1+(y')^2)=1$ tiene por solución general $(x+c)^2+y^2=1$ que representa a una familia de circunferencias con centro en el eje X y radio uno.

La solución particular en el punto $(0,1)$ es la que resulta de sustituir $c=0$ en la solución general, cuya gráfica o curva integral es la circunferencia de radio uno y centro el origen de coordenadas. La envolvente de la familia de curvas integrales está formada por las rectas $y=1$ e $y=-1$. Estas funciones verifican la ecuación diferencial $y'=0$ entonces $y^2=1$. Sin embargo, no se obtienen de la solución general por lo que son soluciones singulares.

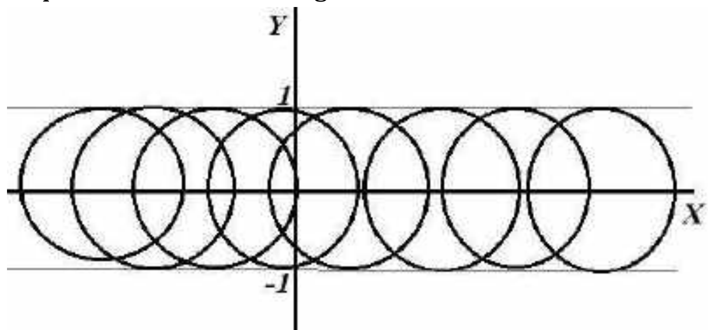


Figura 1.4: Solución general y solución singular.

PROBLEMAS 1.5

Aplicando el método de las isóclinas, trazar las curvas integrales de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y' = x + 2$.
b) $y' = \frac{y-x}{y+x}$.
c) $y' = 5x$.
d) $\frac{dy}{dx} = x - y$.
e) $\frac{dy}{dx} = 1 + x$.
f) $\frac{dy}{dx} = x - 2y$.
g) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-2}{x}$
h) $y' = \frac{1}{y}$.
i) $y' = 1 + y^2$
j) $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$.

1.7 PROBLEMAS DE CONDICIONES INICIALES Y PROBLEMAS EN LA FRONTERA

Para un fenómeno se explique bien mediante una ecuación diferencial, esta debe pasar por tener ciertas condiciones; en la mayoría de los casos está asociado con el tiempo, de esta manera es común hablar de un *problema de valores iniciales* o bien de un *problema de contorno*. En el caso de problemas de valores iniciales, también se conoce como problema de Cauchy.

Definición 1.13. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad (1)$$

donde f es una función continua de t, x en domino $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $(t_0, x_0) \in D$. Un problema con valores iniciales asociados a (1) consiste en encontrar una solución ϕ de la ecuación (1) definida en un intervalo real que contenga a t_0 y cumpla con la condición inicial $\phi(t_0) = x_0$.

En el caso de una ecuación de primer orden, este problema, se denomina también *problema de Cauchy*, y se escribe,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \qquad (2)$$

en el caso de una ecuación escalar de orden n,

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}, \qquad (3)$$

la variable independiente podría representar al tiempo t_0.

a) Si todas las condiciones suplementarias asociadas a la ecuación (2) hacen referencia a un valor x, el problema se denomina *problema con valor inicial*.

b) Si las condiciones hacen referencia a dos valores diferentes de x, el problema recibe el nombre *problema con valor de contorno o frontera*.

Definición 1.4. Un dominio D es un conjunto abierto y conexo

Ejemplo 36. Sea la ecuación de primer orden

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3t \\ x(3) = 2 \end{cases}.$$

Solución. Ya vimos que esta ecuación tiene una solución uniparamétrica a $x(t) = \frac{2}{3}t^2 + k$, una familia de parábolas, encontramos k bajo la condición inicial $x(3) = 2$, se obtiene $k = -4$. Por tanto, una solución al *problema de valor inicial* es

$$x(t) = \frac{2}{3}t^2 - 4. \blacksquare$$

Ejemplo 37. Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{2t}{x} \\ x(-1) = 2 \end{cases},$$

sabiendo que tiene una familia uniparamétrica de soluciones a $t^2 + \frac{x^2}{2} = k$.

Solución. Las curvas integrales son familia de elipses. Describimos una elipse que pase por el punto del valor inicial $(t_0, x_0) = (-1,2)$ resulta que $k = 3$, así se tiene $2x^2 + y^2 = 6$.

Ejemplo 38. Sea la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0,\ x(0) = 2, x'(0) = -3,$$

tiene como solución general $x(x) = k_1\cos(2t) + k_2 sen(2t)$.

Solución. Esta ecuación diferencial está sujeta a las condiciones iniciales

$$x(0) = 2, x'(0) = -3,$$

con estas condiciones hallamos el valor de las constantes k_1, k_2.

De

$$x(t) = k_1\cos(2t) + k_2 sen(2t),$$

y derivando

$$x'(x) = -2k_1\text{sen}(2t) + 2k_2 cos(2t).$$

Aplicamos las condiciones: Si $y(0) = 2$, se tiene

$$2 = k_1 cos0 + k_2 sen0 \text{ de donde } k_1 = 2.$$

Si $y'(0) = -3$, se tiene

$$-3 = -2k_1 sen0 + 2k_2 cos0$$

de donde $k_2 = -\frac{3}{2}$. Por lo tanto, la solución es

$$x(t) = 2\cos(2t) - \frac{3}{2} sen(2t).\blacksquare$$

Ejemplo 39. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0\ ,\ \ y(0) = -1, y'(\pi) = 3,$$

tiene como solución general $y(x) = k_1\cos(2x) + k_2 sen(2x)$.

Solución. Esta ecuación diferencial está sujeta a *condiciones de frontera* $y(0) = -1, y'(\pi) = 3$ (distintos valores para la abscisa), bajo estas condiciones hallamos el valor de las constantes k_1, k_2. De

$$y(x) = k_1\cos(2x) + k_2 sen(2x) \text{ y } y'(x) = -2k_1\text{sen}(2x) + 2k_2 cos(2x).$$

Aplicamos las condiciones:

Si $y(0) = -1$, se tiene

$$-1 = k_1 cos0 + k_2 sen0 \text{ de donde } k_1 = -1.$$

Si $y'(\pi) = 3$, se tiene

$$3 = -2k_1 sen\pi + 2k_2 cos\pi \text{ de donde } k_2 = -\frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, la solución es

$$y(x) = -\cos(2x) - \frac{3}{2} sen(2x).\blacksquare$$

Ejemplo 40. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0\ , y(0) = 3, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

tiene como solución general $y(x) = k_1\cos(2x) + k_2 sen(2x)$.

Solución. Esta ecuación diferencial está sujeta a condiciones de frontera $y(0) = 3, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ (distintos valores de las abscisas), bajo estas condiciones hallamos el valor de las constantes k_1, k_2. De

$$y(x) = k_1\cos(2x) + k_2 sen(2x)$$

y su derivada

$$y'(x) = -2k_1\text{sen}(2x) + 2k_2 cos(2x),$$

aplicamos las condiciones:

Si $y(0) = 3$, se tiene $3 = k_1 cos0 + k_2 sen0$ de donde $k_1 = 3$.

Si $y´\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, se tiene $-1 = -2k_1 sen\frac{\pi}{2} + 2k_2 cos\frac{\pi}{2}$ de donde $k_1 = \frac{1}{2}$, lo cual es absurdo que dos valores distinto para una misma constante, esto afirma que no tiene en absoluto solución, además hace ver que se debe tener cuidado con las condiciones de frontera.■

PROBLEMAS 1.6

1. La ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$, $x(0) = 3, x´(\pi) = -2$, tiene como solución general $x(t) = k_1\cos(3t) + k_2 sen(3t)$. Determine una solución al problema de frontera.
2. La ecuación diferencial de segundo orden $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$, $x(0) = 2, x´(0) = -3$, tiene como solución general $x(t) = k_1\cos(2t) + k_2 sen(2t)$. Halle una solución al problema de valor inicial.
3. La ecuación diferencial $x´´ - 9x = 0$ sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, tiene como solución general $x(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{3t}$. Determine una solución al problema de valor inicial.
4. La ecuación diferencial $x''' - 4x' = 0$ sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$ y $x''(0) = 1$, tiene como solución general $x(t) = c_1 + c_2e^{-2t} + c_3e^{2t}$. Determine una solución al problema de valor inicial.

1.8 EXISTENCIA DE SOLUCIONES

Dada su importancia, en el capítulo 7 estudiamos con más en detalle el teorema de existencia y unicidad. Ahora sólo daremos un teorema básico para ir analizando cuando una ecuación de primer orden tiene o no soluciones.

Teorema 1.1. (Básico de existencia unicidad) Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad \text{(s)}$$

donde se cumple

i) La función $f(t, x)$ es continua en $(t, x) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

ii) $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ es continua en $(t, x) \in D$.

Entonces, existe una solución única ϕ de la ecuación diferencial (s) definida en un intervalo $|t - t_0| \leq \varepsilon$, para ε suficientemente pequeña, y para $(t_0, x_0) \in D$ satisface la condición $\phi(t_0) = x_0$.

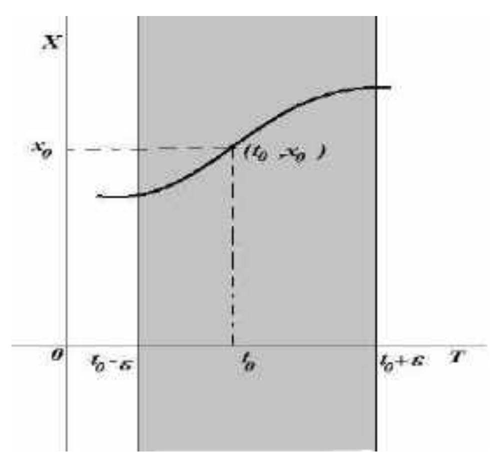


Figura 1.5. La curva pasa por el punto (t_0, x_0).

Ejemplo 42. Consideremos el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(1) = 3$. Aplicamos el teorema 1 y comprobamos la hipótesis $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$ son continuas en todo dominio D del plano xy. La condición inicial $y(1) = 3$ significa que (1,3) pertenece a algunos de tales dominios D, como se cumple todas las hipótesis, por tanto la conclusión es válida; es decir existe una solución ϕ de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ definida en un intervalo $|x - 1| \leq \varepsilon$ entorno de $x_0 = 1$ que satisface $\phi(1) = 3$.

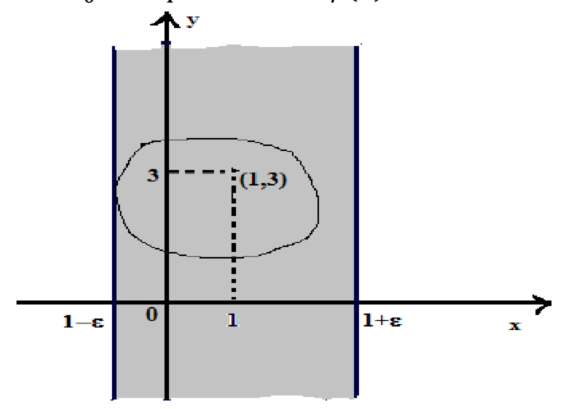


Figura 1.6: La curva pasa por el punto (1,3).

Ejemplo 43. Consideremos el problema $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{\sqrt{x}}, y(1) = 3$.

Vemos que $f(x,y) = \frac{3y}{\sqrt{x}}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{3}{\sqrt{x}}$ son ambas continuas excepto para $x = 0$ (el eje y). El cuadrado de lado con centro (1,3) no contiene al eje y, por lo que f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ satisfacen las hipótesis requeridas en su interior, el cual puede tomarse como dominio D, luego admite una solución única definida en un intervalo suficientemente pequeño entrono de $x_0 = 1$.

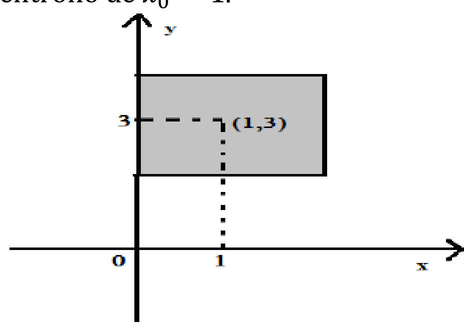


Figura 1.7: Rectángulo muy pequeño que contiene a (1, 3).

Ejemplo 44. Consideremos el problema $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{\sqrt{x}}$, $y(0) = 2$.

Vemos que $f(x,y) = \frac{3y}{\sqrt{x}}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{3}{\sqrt{x}}$ son ambas no continuas en $x = 0$ (el eje y). El punto $(0,2) \notin D$ donde se satisfaga las hipótesis requeridas, por tanto el teorema 1 no proporciona información, y no podemos afirmar que no posee solución alguna.

Ejemplo 45. La función $y(x) = x$ es una solución del problema con valores iniciales

$$y' = (y - x)^{2/3} + 1;\ y(1) = 1. \qquad (1)$$

Determine, si es posible, otra solución y señale porqué podría ocurrir.

Solución. La ecuación (1) no tiene solución única. Analizamos, haciendo el cambio $u(x) = y(x) - x$ con la condición $u(1) = 0$, que transforma (1) en

$$u' = u^{2/3},\ u(1) = 0\ ,$$

que tiene como solución $u(x) = \left(\frac{x-1}{3}\right)^3$, de donde resulta que

$$y(x) = x + \left(\frac{x-1}{3}\right)^3,$$

es también solución del problema (1). Esto muestra que las hipótesis del Teorema de Existencia y unicidad de soluciones de problemas con valores iniciales no se satisfacen. La razón es que la función

$$f(x,y) = (y - x)^{2/3},$$

no satisface ninguna condición de Lipschitz. En efecto, si existiese una constante $M > 0$ tal que

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq M|y - z|,$$

para todo x en un intervalo que contenga a 1, para todo y, z; entonces escogiendo $y = x + 2h, z = x + h$ con $h > 0$, se tendrá;

$$\left|\frac{(2h)^{2/3}}{h} - \frac{h^{2/3}}{h}\right| \leq M,$$

lo que es una contradicción pues el miembro izquierdo de la desigualdad crece indefinidamente si $h \to 0$. Por tanto, f no satisface la condición de Lipschitz. En el capítulo 7 veremos más teoría al respecto.

Ejemplo 46. El siguiente problema de valor inicial

$$y' = -y, y(0) = 1,$$

tiene una única solución.

Solución. La familia de soluciones, $y = ce^{-x}$, imponiendo la condición inicial $y(0) = 1$, $c = 1$. Por lo tanto $y = e^{-x}$, es decir que de un conjunto de exponenciales se escoge una curva, la que pasa por el punto (0,1).

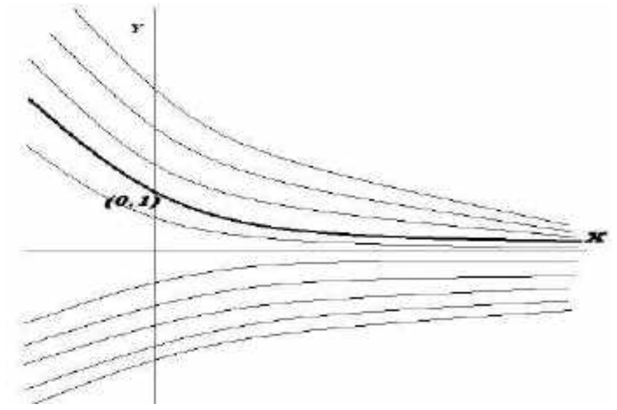


Figura 1.8. Curvas de la familia de exponenciales $y = ce^{-x}$.

El problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (1)$$

Es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Ejemplo 47. Consideremos el problema de valores iniciales

$$x' = 3tx^2, x(1) = 2.$$

Integrando en ambos miembros de la ecuación

$$\int_1^t dx = \int_1^t 3sx^2(s)ds,$$

$$x(t) - x(1) = \int_1^t 3sx^2(s)ds, x(1) = 2,$$

de donde $x(t) = 2 + \int_1^t 3sx^2(s)ds$, es un problema de Cauchy.■

Ejemplo 48. Recíprocamente si

$$x(t) = 1 - 2e^{3t} - \int_0^t e^s x(s)ds,$$

es una ecuación integral, que derivando en ambos miembros respecta a t se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = -6e^{3t} - e^t x(t),$$

así tenemos el problema de Cauchy,

$$\frac{dx}{dt} = -6e^{3t} - e^t x(t), x(0) = -1. \blacksquare$$

El problema (1); (a) puede tener no una solución, (b) puede tener más de una solución, (c) puede tener una única solución y además si la solución depende continuamente de valores iniciales (t_0, x_0).

Ejemplo 49. Sea la ecuación $x' = \frac{x}{t+1}$, $x(-1) = 1$. se trata de un problema que no tiene solución. En $x(t) = \frac{x_0}{t_0+1}(t+1)$ al ser $x(-1) = 1$ se tiene $1 = 0$, lo cual es absurdo.■

Ejemplo 50. Consideremos el problema $x' = 3x^{2/3}$, $x(0) = 0$. La ecuación tiene como solución evidente $x(t) = 0$. Sin embargo $x(t) = (t-k)^3$ debe satisfacer $x(0) = 0$, entonces $k = 0$, luego $x(t) = t^3$ también satisface el problema. Por tanto este problema tiene dos soluciones: $x(t) = 0$ y $x(t) = t^3$.■

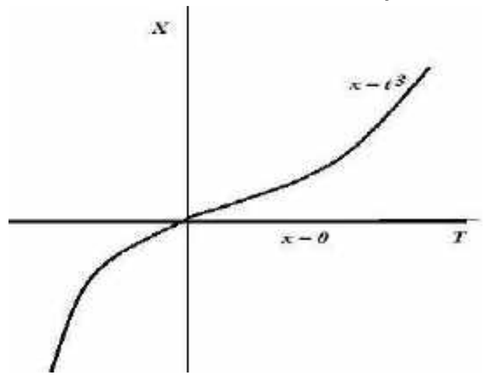


Figura 1.9. Problema con dos soluciones $x = t^3, x = 0$.

Ejemplo 51. Sea el problema $x' = 3t^{2/3}$, $x(t_0) = 0$. La solución es $x(t) = (t-k)^3$ es solución, entonces si definimos como

$$x_{kc}(t) = \begin{cases} (t-k)^3 & si\ t > k \\ 0 & si\ \ c \leq t, t \leq k \\ (t-c)^3 & si\ t < c \end{cases},$$

se ve que $x_{kc}(t)$ es solución del problema dado, lo cual es problema bien formado y existe una única solución.■

PROBLEMAS 1.7

1. Determine una región del plano XY en el cual la ecuación diferencial dada tenga una solución única para cada punto (x_0, y_0) de la región.
   a) $\frac{dy}{dx} = 4y^{2/3}$.
   b) $\frac{dy}{dx} = 6\sqrt{xy}$.
   c) $\frac{dy}{dx} = 2y + 5x$.
   d) $(4 - y^2)y' = x^2$.
   e) $y' = \frac{y^2}{x^2+y^2}$.
   f) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y-x}$.
   g) $y' = (x-2)e^{\frac{y}{x-2}}$.
   h) $\frac{dy}{dx} = x^2\cos(y)$.
2. Dado el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = 4y^{3/4}$, $y(1) = 0$. Demuestre si existe una solución en algún intervalo $|x-1| \leq \varepsilon$, entorno de $x_0 = 1$.

***

CAPÍTULO 2

ECUACIONES ESCALARES DE PRIMER ORDEN

2.1 INTRODUCCIÓN

Estudiamos técnicas para resolver ecuaciones de primer orden. La búsqueda del factor integrante se hace importante para transformar ecuaciones de primer orden y exactas, técnicas que recibe el nombre "de cuadraturas". Muchas técnicas tienen que ver con cambio de variables, los fundamentos lo veremos más adelante. Existe una infinidad de ecuaciones que no pueden resolverse por cuadraturas, de manera que obliga a pensar en otros métodos, así como la motivación al estudio de técnicas cualitativas y numéricas.

Las ecuaciones de primer orden se escriben de dos formas:

a) En la forma de derivada: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, y

b) En la forma diferencial: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Es sencillo expresar de la forma diferencial a la forma de derivadas y viceversa.

2.2. ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Definición 2.1. Sea $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función escalar, la *gradiente* de F es la función vectorial $\nabla F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\nabla F(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}\ .$$

Ejemplo 1. El gradiente de la función $F(x, y) = 3xy^4 + 2x^2y^2 + y$ es

$$\nabla F(x, y) = (3y^4 + 4xy^2)\vec{\imath} + (12xy^3 + 4x^2y + 1)\vec{\jmath}.$$

Definición 2.2. Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función vectorial, se dice que f es un *campo vectorial conservativo* si existe una función escalar $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{\nabla F = f}$. En este caso a la función escalar F se denomina función potencial.

Definición 2.3. Sea F una función de dos variables que posee derivadas parciales primeras continuas en un dominio D. La diferencial total dF de la función F es

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Definición 2.4. A la expresión de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

se llama *diferencial exacta* en un dominio D, si existe una función F de dos variables reales tal que $d(F(x,y)) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$. Es decir que la función F cumple

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \text{ y } \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y),\ \forall(x,y) \in D.$$

Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta, la ecuación diferencial,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

se llama *ecuación diferencial exacta*.

Teorema 2.1. Consideremos la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (\alpha_1)$$

donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones de clase C^1 en $(x,y) \in D$. La ecuación (α_1) es exacta en D

$$\Leftrightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \forall(x,y) \in D.$$

Demostración. i) $(\Rightarrow)$ Si la ecuación (α_1) es exacta en D, se verifica que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

es una diferencial exacta en D, luego por definición de diferencial exacta, existe una función F que cumple:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \text{ y } \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)\ \forall(x,y) \in D,$$

derivando,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial x}$$

ahora por la continuidad de las derivadas parciales de $M(x,y)$ y $N(x,y)$ al ser de clase C^1 obtenemos que

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \text{ entonces } \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\ \forall(x,y) \in D.$$

ii) $(\Leftarrow)$ Consideramos el hecho de que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\ \forall(x,y) \in D,$$

para demostrar que $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una ecuación exacta en D. Esto es que existe una función F que satisface,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y),\quad \forall(x,y) \in D \qquad (\alpha_2)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y),\quad \forall(x,y) \in D \qquad (\alpha_3)$$

supongamos que se puede encontrar una función apropiada $F(x,y)$ que cumpla ya sea (α_2) ó (α_3). Ahora supongamos que $F(x,y)$ satisface (α_2). Entonces,

$$F(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \varphi(y) \qquad (\alpha_4)$$

donde $\int M(x,y)\partial x$ señala una integración parcial con respecto de x, manteniendo "y" constante y $\varphi(y)$ es una función cualquiera que depende solamente de y. La función $\varphi(y)$ tiene que ser apropiada de manera que $F(x,y)$ sean todas soluciones de (α_1). Ahora diferenciamos parcialmente (α_3) respecto a y se obtiene,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)\partial x + \frac{d\varphi(y)}{dy} \qquad (\alpha_5)$$

puesto que (α_2) satisface (α_5) se obtiene,

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)\partial x + \frac{d\varphi(y)}{dy} \qquad (\alpha_6)$$

de donde $\frac{d\varphi(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)\partial x$

como $\varphi(y)$ es una función de únicamente de y, entonces $\frac{d\varphi(y)}{dy}$ tiene que ser independiente de x. Es decir que (α_6) será cierto si,

$N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)\partial x$ es independiente de x. Entonces será suficiente probar,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)\partial x\right] = 0.$$

En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)\partial x\right] = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\int M(x,y)\partial x) \qquad (\alpha_6)$$

ahora como ha de satisfacer (α_2) y (α_3) se obtiene,

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M(x,y)\partial x = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int M(x,y)\partial x = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y},$$

sustituyendo en (α_6)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\partial x\right]\right. = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\int M(x,y)\partial x\right)$$

$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0$$

pues por hipótesis $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}, \forall(x,y) \in D$.

Esto permite escribir φ como,

$$\varphi(y) = \int\left[N(x,y) - \int\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\partial x\right]dy,$$

reemplazando $\varphi(y)$ en la ecuación (α_4),

$$F(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \int\left[N(x,y) - \int\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\partial x\right]dy$$

lo cual satisface (α_2) y (α_3) $\forall(x,y) \in D$. Por lo tanto la ED $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta en D.

Teorema 2.2. Si la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ satisface las condiciones de diferenciabilidad y es exacta en un dominio D, entonces la ecuación diferencial tiene una familia uniparamétrica de soluciones que se escribe $F(x,y) = c$, donde c es una constante arbitraria.

Demostración. Comprobemos que $F(x,y = c$ es solución de la ecuación, asumiendo que y es función de x, derivamos implícitamente

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} F'(x,y) = 0,$$

como $F(x,y)$ es una función potencial del campo vectorial $f(x,y)$, entonces

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \text{ y } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

de donde

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \blacksquare$$

Ejemplo 2. Sea F una función de dos variables reales definida por

$$F(x,y) = x^2y^3 + 3x^5y, \ \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Encuentre una expresión para la diferencial total de F.

Solución. Tenemos,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2xy^3 + 15x^4y, \ \ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2 + 3x^5,$$

y la diferencial total es

$$d(f(x,y) = (2xy^3 + 15x^4y)dx + (3x^2y^2 + 3x^5)dy\,, \ \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ejemplo 3. Justifique si la ecuación diferencial $2x^2y^4dx + 4x^2y^3dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta.

Solución. Es una ecuación exacta, pues la expresión $2xy^4dx + 4x^2y^3dy$ es una diferencial exacta, ya que es la diferencial total de la función $F(x,y) = x^2y^4$, $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4. Verifique si la ecuación $(x + y^3)dx + (3xy^2 + y^2)dy = 0$ es exacta.

Solución. Aplicamos el teorema 2.1. Tenemos que verificar, si $M(x,y) = (x + y^3)$ y $N(x,y) = 3xy^2 + y^2$,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

En consecuencia la ecuación diferencial es exacta en todo dominio D.

Ejemplo 5. Verifique si la ecuación $(x + y)dx + (y - x^2)dy = 0$ es exacta.

Solución. En esta ecuación se tiene $M(x,y) = x + y,\ N(x,y) = y - x^2$, hallamos las derivadas parciales para aplicar el teorema 2.1,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 \neq -2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

en general no es exacta, salvo en que $x = -\frac{1}{2}$.

Ejemplo 6. Resuelve la ecuación $(e^x cosy + 4x)dx + (-e^x seny)dy = 0$.

Solución. Primero verificamos la exactitud. Tenemos que $M(x, y) = e^x cosy + 4x$, $N(x, y) = -e^x seny$ donde

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -e^x seny = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \forall (x, y) \in IR^2.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial es exacta.

Ahora buscamos $F(x, y)$ que cumpla las condiciones,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = e^x cosy + 4x = M(x, y) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -e^x seny = N(x, y). \qquad (2)$$

De la ecuación (1) se tiene $F(x, y) = \int (e^x cosy + 4x)\partial x + \varphi(y)$

$$F(x, y) = e^x cosy + 2x^2 + \varphi(y) \qquad (3)$$

ahora derivando respecto de y,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -e^x seny + \varphi'(y), \qquad (4)$$

sustituyendo (2) en (4) $-e^x seny = -e^x seny + \varphi'(y)$ de donde $\varphi'(y) = 0$ es decir $\varphi(y) = c_0$, con c_0 una constante arbitraria; luego una solución uniparamétrica es $F(x, y) = c$, es decir $c = e^x cosy + 2x^2 + c_0$. Por tanto $e^x cosy + 2x^2 = k$, donde $k = c - c_0$. ■

Ejemplo 7. Halle el espacio de soluciones de la ecuación diferencial

$$(e^x cosy + 4x + 1)dx + (-2 - e^x seny)dy = 0.$$

Solución. Tenemos $M(x, y) = e^x cosy + 4x + 1$, $N(x, y) = -2 - e^x seny$, y verificamos si la ecuación es exacta,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -e^x seny = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

en efecto es exacta, entonces se puede encontrar una función $F(x, y)$ que satisface,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = e^x cosy + 4x + 1 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -2 - e^x seny \qquad (2)$$

de la ecuación (2) se tiene, $F(x, y) = \int (-2 - e^x seny)\, \partial y + \psi(x)$, es decir

$$F(x, y) = -2y + e^x cosy + \psi(x), \qquad (3)$$

derivando respecto a x, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = -e^x seny + \psi'(x)$, igualando con (1) se obtiene,

$$\psi'(x) = 4x + 1$$

de donde $\psi(x) = 2x^2 + x$ que reemplazando en (3) se obtiene la solución,

$e^x cosy + 2x^2 + x - 2y = c$, con c constante arbitraria. ■

Ejemplo 8. Halle el espacio de soluciones de la ecuación diferencial

$$2xydx + (x^2 - 1)dy = 0.$$

Solución. Tenemos $M(x,y) = 2xy$, $N(x,y) = x^2 - 1$, y verificamos si la ecuación es exacta,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

en efecto es exacta, entonces se puede encontrar una función $F(x,y)$ que satisface,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2xy \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2 - 1 \qquad (2)$$

de la ecuación (2) se tiene, $F(x,y) = \int (x^2 - 1)\,\partial y + \psi(x)$, es decir

$$F(x,y) = x^2y - y + \psi(x)\,, \qquad (3)$$

derivando respecto a x,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2xy + \psi'(x),$$

igualando con (1) se obtiene,

$$\psi'(x) = 0$$

de donde $\psi(x) = k$ que reemplazando en (3) se obtiene la solución,

$$x^2y - y = c$$

con c constante arbitraria. ■

Ejemplo 9. Resuelva el problema de valor inicial

$$(\cos(x)\,sen(x) - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0, \text{ sabiendo que } y(0) = 2.$$

Solución. Tenemos

$$M(x,y) = \cos(x)\,sen(x) - xy^2, N(x,y) = y(1 - x^2),$$

y verificamos si la ecuación es exacta,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

en efecto es exacta, entonces se puede encontrar una función $F(x,y)$ que satisface,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \cos(x)\,sen(x) - xy^2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = y(1 - x^2) \qquad (2)$$

de la ecuación (2) se tiene, $F(x,y) = \int (y(1 - x^2)\,\partial y + \psi(x)$, es decir

$$F(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 + \psi(x)\,, \qquad (3)$$

derivando respecto a x,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = -xy^2 + \psi'(x),$$

igualando con (1) se obtiene,

$$\psi'(x) = \cos(x)\, sen(x)$$

de donde $\psi(x) = \frac{1}{2} sen^2 x$ que reemplazando en (3) se obtiene la solución,

$$y^2 - x^2y^2 + sen^2 x = c$$

con c constante arbitraria, como $y(0) = 2$ entonces $c = 4$. Por tanto,

$$y^2 - x^2y^2 + sen^2 x = 4\,. \blacksquare$$

Ejemplo 10. Resolver el problema de valor inicial

$$(e^{2y} - ycos(xy))dx + (2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y)dy = 0,$$

sabiendo que $y(0) = 2$.

Solución. Tenemos

$$M(x, y) = e^{2y} - ycos(xy), N(x, y) = 2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y,$$

y verificamos si la ecuación es exacta,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2e^{2y} - \cos(xy) + xysen(xy) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

en efecto es exacta, entonces se puede encontrar una función $F(x, y)$ que satisface,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = e^{2y} - ycos(xy) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y \qquad (2)$$

de la ecuación (2) se tiene,

$$F(x, y) = \int (2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y)\, \partial y + \psi(x), \text{ es decir}$$

$$F(x, y) = xe^{2y} - sen(xy) + y^2 + \psi(x)\,, \qquad (3)$$

derivando respecto a x,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = e^{2y} - y\cos(xy) + \psi'(x),$$

igualando con (1) se obtiene,

$$\psi'(x) = 0$$

de donde $\psi(x) = k$ que reemplazando en (3) se obtiene la solución,

$$xe^{2y} - sen(xy) + y^2 = c\,,$$

con c constante arbitraria, como $y(0) = 2$ entonces $c = 4$. Por tanto,

$$xe^{2y} - sen(xy) + y^2 = 4\,. \blacksquare$$

Ejemplo 11. Resolver el problema de valor inicial,

$$(6tcosy - 12ty^4)dt + (-3t^2seny - 24t^2y^3 + 2)dy, y(0) = 1.$$

Solución. Justificamos que la ecuación es exacta, sea

$$M(t, y) = 6tcosy - 12ty^4 \text{ y } N(t, y) = -3t^2seny - 24t^2y^3 + 2,$$

es exacta, se cumple

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = -6tseny - 48ty^3 = \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}$$

en todo $(t, y) \in D$.

Buscamos $F(t,y)$ que satisface,

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial t} = 6tcosy - 12ty^4 = M(t,y) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial y} = -3t^2seny - 24t^2y^3 + 2 = N(t,y) \qquad (2)$$

entonces de (2) tenemos

$$F(t,y) = \int(-3t^2seny - 24t^2y^3 + 2)\partial y + \psi(t),$$

$$F(t,y) = 3t^2cosy - 6t^2y^4 + 2y + \psi(t) \qquad (3)$$

derivando parcialmente respecto de t obtenemos,

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial t} = 6tcosy - 12ty^4 + \psi'(t)$$

igualando a (1) resulta de inmediato que $\psi'(t) = 0$, entonces $\psi(t) = c_0$, sustituyendo en (3) se obtiene

$$F(t,y) = 3t^2cosy - 6t^2y^4 + 2y + c_0,$$

en consecuencia una familia uniparamétrica de soluciones es $F(t,y) = c_1$, es decir,

$$3t^2cosy - 6t^2y^4 + 2y = c, \quad c = c_1 - c_0.$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = 1$ se encuentra $c = 2$. Por lo tanto, la solución al problema de valor inicial es

$$3t^2cosy - 6t^2y^4 + 2y = 2. \blacksquare$$

Ejemplo 12. Sea la ecuación

$$4x^2ydx = (-y^2 - 3x^2q(x))dy,$$

obtener una función $q(x)$ de manera que la ecuación sea exacta.

Solución. La ecuación se escribe

$$4x^2ydx + (y^2 + 3x^2q(x))dy = 0,$$

para que sea exacta debe cumplir,

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^2y) = 4x^2 = 6xq(x) + 3x^2q'(x) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 + 3x^2q(x)),$$

es decir $q' + \frac{2}{x}q = \frac{4}{3}$ que es lineal, cuya solución es

$$q(x) = \frac{4}{9}x + \frac{c}{x^2}. \blacksquare$$

PROBLEMAS 2.1

1. Determine la solución general de las ecuaciones diferenciales:
   a) $(x^3 + xy^2)dx = -(y^3 + x^2y)dy$,
   R. $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = c$.

b) $\left(2-\frac{5}{x}+y\right)dx+\left(3-\frac{3}{y}+x\right)dy=0.$

c) $(1+t^2)dx+2txdt=ctg(t)dt.$

R. $\cos(t)+ce^{x(1+t^2)}sen(t)=1.$

d) $(x^2t+5)dt+(xt^2-2)dx=0$

R. $t^2x^2+10t-4x=k.$

e) $\frac{dx}{dt}=\frac{sen2t-tanx}{tsec^2x}.$

f) $y(x^2+2y^2)y'+x(2x^2+y^2)=0.$

R. $x^4+x^2y^2+y^4=c.$

g) $(senx+cosy)dx=(xsenx-y)dy$,

R. $xcosy-cosx+\frac{y^2}{2}=c.$

h) $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0.$

i) $(sen(t)sen(x)-te^x)dx=(e^x+\cos(t)\cos(x))dt.$

R. $te^x+sen(t)\cos(x)=k.$

j) $\frac{2xy-2y}{y^2+1}dy+\ln(y^2+1)\,dx=0$,

R. $(x-1)ln(y^2+1)=c$.

k) $(4tx^3+3x^2+1)dt+(6t^2x^2+6xt)dx=0.$

R. $2t^2x^3+3tx^2+t=c.$

l) $(3x^2+6xy^2)dx=(-6x^2y-4y^3dy),$

R. $x^3+3x^2y^2+y^4=c.$

m) $(y^2+x^2+2x)+2yxy'=0$,

R. $xy^2+\frac{x^3}{3}+x^2=c$.

n) $\left[\frac{1}{y^2}sen\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}cos\left(\frac{y}{x}\right)+1\right]dx+\left[\frac{1}{x}cos\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y^2}sen\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y^2}\right]dy=0.$

R. $sen\left(\frac{y}{x}\right)-cos\left(\frac{x}{y}\right)+x-\frac{1}{y}=c.$

2. Resuelve el problema de valor inicial.

a) $(3t^2x+e^x)dt+(t^3+te^x-2x)dx=0.$

b) $(x^3+xy^2)dx=-(y^3+x^2y)dy$,

R. $x^4+2x^2y^2+y^4=c.$

c) $(2tx-3)dt+(t^2+4x)dx=0, x(1)=2.$

R. $t^2x-3t+2x^2=7$.

a) $\left(\frac{3-x}{t^2}\right)dt+\left(\frac{x^2-2t}{tx^2}\right)dx=0; x(-1)=2.$

R. $-3x+2t+x^2=2tx.$

b) $(xln(x)-e^{tx})dt+\left(\frac{1}{x}+tln(x)\right)dx=0.$

c) $x(t^2+2x^2)x' + t(2t^2+x^2) = 0; x(1) = 1.$
R. $t^2x^2 + x^4 + t^4 = 3.$
d) $y(x^2-2y^2)y' + x(2x^2+y^2) = 0, y(0) = 1.$
R. $x^2y^2 - x^4 - 2y^3 = -2.$

3. Determine el valor de m para la ecuación $(t^2+3tx)dt + (mt^2+4x)dx = 0$ sea exacta. Resuelve le ecuación.
R. $m = 3/2.$
4. Determine el valor o valores de m de forma que la ecuación diferencial $(2t - xsen(tx) + mx^4)dt - \left(20m^2tx^3 + tsen(tx)\right)dx = 0.$
R. $m = 0, m = -\frac{1}{5}.$
5. Determine una función $M(x,y)$ de manera que la ecuación diferencial $M(x,y)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right)dy = 0$ sea exacta.
R. $M(x,y) = ye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} + c.$
6. Determine una función $N(t,x)$ de manera que la ecuación diferencial $\left(\sqrt{\frac{x}{t} + \frac{t}{t^2+x}}\right)dt + N(t,x)dx = 0$ sea exacta.
7. Dada la ecuación $(ax+by)dx + (rx+sy)dy = 0$, determinar la condición que cumple a, b, r, s de modo que esta ecuación sea exacta.
R. $b = r.$
8. En la ecuación diferencial $(t^{-2}x^{-2} + tx^{-3})dt + N(t,x)dx = 0$, determine la función más general $N(t,x)$ de modo que la ecuación dada sea exacta.
R. $N(t,x) = 2t^{-1}x^{-3} - \frac{3}{2}t^2x^{-4} + c.$

2.3 FACTORES INTEGRANTES Y ECUACIONES REDUCTIBLES A DIFERENCIALES EXACTAS

Está claro si en el teorema 2.1 se tiene $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, entonces la ecuación diferencial dada no es exacta, en este caso buscamos otros métodos para transformar a ecuaciones exactas. Las ecuaciones diferenciales exactas son relativamente inestables, la exactitud exige un balance en la forma de la ecuación diferencial, balance que se destruye bajo pequeñas modificaciones. Estudiaremos bajo qué condiciones existe esa tal función llamada *factor integrante*. La multiplicación de una ecuación diferencial por un factor integrante puede dar lugar a la aparición de una o más soluciones de la ecuación transformada, la pérdida de una o más soluciones de la ecuación original, también puede ser ambas.

Por tanto, siempre que se use factor integrante se debe comprobar se hemos perdido o ganado soluciones.

Ejemplo 13. La ecuación diferencial

$$(2y-6x)dx+\left(3x-\frac{4x^2}{y}\right)dy=0$$

no es exacta. Sin embargo al multiplicarla por $\mu(x,y)=xy^2$ obtenemos la ecuación

$$(2xy^3-6x^2y^2)dx+(3x^2y^2-4x^3y)dy=0,$$

Lo cual es exacta, entonces aquí $\mu(x,y)=xy^2$ es un *factor integrante* de la ecuación diferencial dada. ■

Es comprensible la pregunta, ¿Cómo encontrar un factor integrante? Vamos a tratar de explorar un poco, buscar algún criterio para hallar algunos.

Definición 2.5. Si la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \qquad (1)$$

no es exacta en un dominio D, pero sin embargo la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

es exacta en D; entonces $\mu(x,y)$ recibe el nombre de *factor integrante* de la ecuación diferencial (1).

Teorema 2.3. Dada una ecuación diferencial no exacta,

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \qquad (\alpha)$$

i) Si $\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]$ depende únicamente de x, entonces la función

$$\mu(x)=exp\left\{\int\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dx\right\}$$

es un factor integrante de la ecuación (α).

ii) Si $\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$ depende de y únicamente, entonces la función

$$\mu(y)=exp\left\{\int\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]dy\right\}$$

es un factor integrante de la ecuación (α).

Demostración. Si $\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$ es exacta en D, deberá satisfacer,

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)M(x,y)]=\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)N(x,y)],$$

Entonces

$$\mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}+M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}=\mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}+N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}$$

$$M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}-N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}=\mu(x,y)\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]. \qquad (1)$$

Es claro que si en la expresión (1) no imponemos cierta condición será difícil de resolver, dos casos aquí, si $\mu(x,y)=\mu(x)$ depende de x únicamente resulta,

$$-N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}=\mu(x)\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right],$$

$$\int\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}d\mu=\int\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dx$$

de donde

$$\mu(x)=exp\left\{\int\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dx\right\},$$

es un factor integrante de la ED (α).

Ahora si en la expresión (1) $\mu(x,y)=\mu(y)$ depende de y únicamente resulta,

$$M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}=\mu(y)\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$$

$$\int\frac{\mu'}{\mu}d\mu=\int\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]dy,$$

Luego

$$\mu(y)=exp\left\{\int\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]dy\right\},$$

es un factor integrante de la ecuación diferencia (α).■

Teorema 2.4. Dada una ecuación diferencial no exacta,

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \qquad (\beta)$$

(i) Si $\frac{1}{2xN+2yM}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$ depende únicamente de y^2-x^2, entonces la función

$$\mu(y^2-x^2)=exp\left\{\int\frac{1}{2xN+2yM}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]dz\right\}$$

es un factor integrante de la ecuación (α), siendo $z=y^2-x^2$.

(ii) Si $\frac{1}{2yM-N}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$ depende de $x+y^2$ únicamente, entonces la función

$$\mu(x+y^2)=exp\left\{\int\frac{1}{2yM-N}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]dz\right\}$$

es un factor integrante de la ecuación (α), siendo $z=x+y^2$.

(iii) Si $\frac{1}{2yM-2xN}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]$ depende de x^2+y^2 únicamente, entonces la función

$\mu(x^2+y^2)=exp\left\{\int\frac{1}{2yM-2xN}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right]dz\right\}$ es un factor integrante de la ecuación (α), siendo $z=x^2+y^2$.

Demostración. i) Si $\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$ es diferencial exacta en D, si y sólo si,

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)M(x,y)]=\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)N(x,y)].$$

Entonces, si $\mu(z)$ depende exclusivamente de $z=y^2-x^2$; derivando se obtiene

$$2y\mu'(z)M(x,y)+\mu(z)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=-2x\mu'(z)N(x,y)+\mu(z)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

de donde $\frac{\mu'(z)}{\mu(z)}=\frac{\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)}{2xN+2yM}$ depende únicamente de y^2-x^2, es decir depende sólo de $z=y^2-x^2$. Por lo tanto, existe un factor integrante y es

$$\mu(z)=exp\left[\int\frac{\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)}{2xN+2yM}dz\right].\blacksquare$$

ii) Si $\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$ es diferencial exacta en D, sí y sólo si,

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)M(x,y)]=\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)N(x,y)].$$

Entonces, si $\mu(z)$ depende exclusivamente de $z=x+y^2$; derivando se obtiene

$$2y\mu'(z)M(x,y)+\mu(z)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\mu'(z)N(x,y)+\mu(z)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

de donde

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)}=\frac{\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)}{2yM-N},$$

depende únicamente de $x+y^2$, es decir depende sólo de $z=x+y^2$. Por lo tanto existe un factor integrante y es

$$\mu(z)=exp\left[\int\frac{\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)}{2yM-N}dz\right].\blacksquare$$

iii) Si $\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$ es diferencial exacta en D, sí y sólo si,

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)M(x,y)]=\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)N(x,y)].$$

Entonces, si $\mu(z)$ depende exclusivamente de $z=x^2+y^2$; derivando se obtiene

$$2y\mu'(z)M(x,y)+\mu(z)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=2x\mu'(z)N(x,y)+\mu(z)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

de donde

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)}=\frac{\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)}{2yM-2xN},$$

depende únicamente de x^2+y^2, es decir depende sólo de $z=x^2+y^2$. Por lo tanto, existe un factor integrante y es

$$\mu(z) = exp\left[\int \frac{\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)}{2yM - 2xN}dz\right]. \blacksquare$$

Ejemplo 14. Resuelva $(5tx + 4x^2 + 1)dt + (t^2 + 2tx)dx = 0$.

Solución. Se puede verificar que la ecuación dada no es exacta, entonces se busca un factor integrante. Tenemos que $M(t,x) = 5tx + 4x^2 + 1,\ N(t,x) = t^2 + 2tx$.

de $\frac{1}{N(t,x)}\left[\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}\right] = \frac{1}{t^2+2tx}[5t + 8x - 2t - 2x] = \frac{3(t+2x)}{t(t+2x)} = \frac{3}{t}$

depende únicamente de t, luego tiene un factor integrante de la forma,

$$\mu(t) = exp\left\{\int \frac{3}{t}dt\right\} = t^3,\ t > 0,$$

así la ecuación exacta queda

$$(5t^4x + 4t^3x^2 + t^3)dt + (t^5 + 2t^4x)dx = 0,$$

Luego, la solución uniparamétrica es $4t^5x + 4t^4x^2 + t^4 = c$ ∎.

Ejemplo 15. Resuelva $(2x + tany)dx + (-x + x^2tany)dy = 0$.

Solución. Esta ecuación no es exacta, de manera hallamos un factor integrante.

De $M(x,y) = 2x + tany$ y $N(x,y) = -x + x^2tany$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = sec^2y \neq 1 - 2xtany = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Buscamos un factor integrante de la forma,

$$\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right] = \frac{1}{2x+tany}[1 - 2xtany - sec^2y] = -tany = \mu(y),$$

depende únicamente de y, entonces un factor integrante es

$$\mu(y) = exp\{\int(-tany)dy\} = \exp(Ln|cosy|) = cosy\text{ , si } cosy > 0.$$

Así la ecuación inicial queda

$$(2xcosy + cosy.tany)dx + (-xcosy + x^2cosy.tany)dy = 0$$

también se puede escribir,

$$(2xcosy + seny)dx + (xcosy - x^2seny)dy = 0,$$

como la ecuación es exacta, entonces una función F tal que cumple,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2xcosy + seny \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = xcosy - x^2seny\ , \qquad (2)$$

de (1) se tiene $F(x,y) = \int(2xcosy + seny)\partial x + \varphi(y)$,

$$F(x,y) = x^2cosy + xseny + \varphi(y) \qquad (3)$$

derivando parcialmente respecto de

$$y\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = xcosy - x^2seny + \varphi'(y),$$

que comparado con (2) resulta $\varphi'(y) = 0$, entonces $\varphi(y) = k$ con k constante, luego en (3) queda,

$$F(x,y) = x^2cosy + xseny + k = c.$$

Por tanto, la solución uniparamétrica es,

$$x^2cosy + xseny = c_1, \text{ donde } c_1 = c - k \text{ es constante. } ■$$

Ejemplo 16. Resuelva la ecuación $(3y + 4ty^2)dt + 2tdy = -3t^2ydy$, buscando un factor integrante de la forma $\mu(t,y) = t^py^q$.

Solución. La ecuación se escribe $(3y + 4ty^2)dt + (2t - -3t^2y)dy = 0$ y se puede comprobar que no es exacta. Entonces si $\mu(t,y) = t^py^q$ es un factor integrante, entonces la ecuación escrita como,

$$(3t^py^{q+1} + 4t^{p+1}y^{q+2})dt + (2t^{p+1}y^q - -3t^{p+2}y^{q+1})dy = 0$$

es exacta, entonces debe satisfacer la condición de

$$\frac{\partial}{\partial y}(3t^py^{q+1} + 4t^{p+1}y^{q+2}) = \frac{\partial}{\partial t}(2t^{p+1}y^q - -3t^{p+2}y^{q+1}),$$

es decir $3(q+1)t^py^q + 4(q+2)t^{p+1}y^{q+1} \equiv 2(q+1)t^py^q + 3(p+2)t^{p+1}y^{q+1}$

$$3(q+1) = 2(p+1) \text{ y } 4(q+2) = 3(p+2),$$

resolviendo el sistema resulta $q = 1$ y $p = 2$, luego el factor integrante es $\mu(t,y) = t^2y$ y la ecuación exacta se escribe,

$$(3t^2y^2 + 4t^3y^3)dt + (2t^3y + 3t^4y^2)dy = 0,$$

cuya solución uniparamétrica es $t^3y^2 + t^4y^3 = c$. ■

Ejemplo 17. Halle la solución general de la ecuación

$$6xydx = (-4y - 9x^2)dy.$$

Solución. Escribiendo como,

$$6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0, \qquad (1)$$

tenemos $M(x,y) = 6xy$, $N(x,y) = 4y + 9x^2$, verificamos que no es exacta, pues,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 6x, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 18x.$$

Entonces buscamos un factor integrante; analizamos la expresión,

$$\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right] = \frac{1}{6xy}(18x - 6x)) = \frac{2}{y}$$

es función únicamente de y, entonces la ED (1) tiene un factor integrante

$$\mu(y) = exp\left(\int \frac{2}{y}dy\right) = \exp(lny^2) = y^2,$$

multiplicando la ecuación (1) por $\mu(y) = y^2$ se obtiene,

$$6xy^3dx + (4y^3 + 9x^2y^2)dy = 0, \qquad (2)$$

como la ecuación (2) es exacta, entonces existe una función $F(x,y)$ que cumple,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 6xy^3 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 4y^3 + 9x^2y^2 \qquad (4)$$

de (4) se tiene $F(x,y) = \int(4y^3 + 9x^2y^2)\partial y + \psi(x)$

$$F(x,y) = y^4 + 3x^2y^3 + \psi(x) \qquad (5)$$

ahora derivando parcialmente respecto a x,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 6xy^3 + \psi'(x) \qquad (6)$$

comparando (6) con (3) se obtiene $\psi'(x) = 0$, de donde $\psi(x) = c_1$, por lo tanto en (5) la solución uniparmétrica es,

$$c = y^4 + 3x^2y^3 + c_1\,,$$

es decir $y^4 + 3x^2y^3 = k$, con $k = c - c_1$. ■

Ejemplo 18. Halle un factor integrante de la ecuación diferencial,

$$(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0.$$

Solución. Sea $M(x,y) = x^2 + y^2 + 1$; $N(x,y) = -2xy$, la ecuación no es exacta, se ve que

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 2y \neq -2y = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y).$$

Buscamos un factor integrante, probamos con la expresión,

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)}{2xN + 2yM} = \frac{-2y-2y}{2x(-2xy)+2y(x^2+y^2+1)} = \frac{-2}{y^2-x^2+1} = f(y^2 - x^2),$$

que depende de $y^2 - x^2$. Por lo tanto, hay un factor integrante,

$$u(z) = exp\left[\frac{-2}{z+1}dz\right] = (1+z)^{-2},$$

siendo $\mu = \frac{1}{(y^2-x^2+1)^2}$.

Problema 1. Se considera la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Determinar la relación que debe cumplir para que la ecuación diferencial tenga un factor integrante $\mu = \mu(y^2 - x^2)$ que depende de $y^2 - x^2$.

Solución. La ecuación $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ es diferencial exacta si y sólo si

$$\frac{\partial(\mu M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N(x,y))}{\partial x},$$

Entonces $\mu = \mu(z)$ depende sólo de $z = y^2 - x^2$, se cumple

$$\mu'(z)2yM(x,y) + \mu(z)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2x\mu'(z)N(x,y) + \mu(z)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

de donde $\frac{\mu\prime(z)}{\mu(z)} = \frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{2xN(x,y)+2yM(x,y)} = f(y^2 - x^2)$ ha de ser función de $y^2 - x^2 = z$.

Por tanto, un factor integrante es $\mu(z) = exp(\int f(z)dz)$.■

Problema 2. Se considera la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Determinar la relación que debe cumplir para que la ecuación diferencial tenga un factor integrante $\mu = \mu(y^2 + x^2)$ que depende de $y^2 + x^2$.

Solución. La ecuación $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ es diferencial exacta si y sólo si

$$\frac{\partial(\mu M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N(x,y))}{\partial x},$$

entonces $\mu = \mu(z)$ depende sólo de $z = y^2 + x^2$, se cumple

$$\mu'(z)2yM(x,y) + \mu(z)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \mu'(z)2xN(x,y) + \mu(z)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

de donde $\frac{\mu\prime(z)}{\mu(z)} = \frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{2yM(x,y) - 2xN(x,y)} = f(y^2 + x^2)$ ha de ser función de $y^2 + x^2 = z$. Por tanto, un factor integrante es $\mu(z) = exp(\int f(z)dz)$.■

Problema 3. Se considera la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Determinar la relación que debe cumplir para que la ecuación diferencial tenga un factor integrante $\mu = \mu(x + y^2)$ que depende de $x + y^2$.

Solución. La ecuación $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ es diferencial exacta si y sólo si

$$\frac{\partial(\mu M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N(x,y))}{\partial x},$$

entonces $\mu = \mu(z)$ depende sólo de $z = x + y^2$, se cumple

$$\mu'(z)2yM(x,y) + \mu(z)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \mu'(z)N(x,y) + \mu(z)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

de donde $\frac{\mu\prime(z)}{\mu(z)} = \frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{2yM(x,y) - N(x,y)} = f(x + y^2)$ ha de ser función de $x + y^2 = z$. Por tanto, un factor integrante es $\mu(z) = exp(\int f(z)dz)$.■

Problema 4. Se considera la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Determinar la relación que debe cumplir para que la ecuación diferencial tenga un factor integrante $\mu = \mu(xy^2)$ que depende de xy^2.

Solución. La ecuación $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ es diferencial exacta si y sólo si

$$\frac{\partial(\mu M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N(x,y))}{\partial x},$$

entonces $\mu = \mu(z)$ depende sólo de $z = xy^2$, se cumple

$$\mu'(z)2xyM(x,y) + \mu(z)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \mu'(z)y^2N(x,y) + \mu(z)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

de donde $\frac{\mu\prime(z)}{\mu(z)} = \frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{2xyM(x,y) - y^2N(x,y)} = f(xy^2)$ ha de ser función de $xy^2 = z$. Por tanto, un factor integrante es $\mu(z) = exp(\int f(z)dz)$.■

Ejemplo 19. Resuelve $(x - xy)dx + (y + x^2)dy = 0$.

Solución. La ecuación diferencial dada no es exacta, buscamos si tiene un factor integrante: ensayamos con

$$\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{2yM(x,y)-2xN(x,y)}=\frac{2x+x}{2y(x-xy)-2x(y+x^2)}$$
$$=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)=f(x^2+y^2),$$

según problema 3, al depender sólo $x^2+y^2=z$ hay un factor integrante y es

$$\mu(z)=\exp\left(\int-\frac{3}{2z}dz\right)=\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

multiplicando por $\mu(z)$ a la ecuación diferencial dada se obtiene la ecuación diferencial exacta

$$\frac{x-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx+\frac{y+x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy=0,$$

hallamos la función potencial, y la solución general es por tanto

$$\frac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=c. \blacksquare$$

Ejemplo 20. Resuelve $(3x+2y+y^2)dx+(x+4xy+5y^2)dy=0$, si tiene un factor integrante a $\mu(x,y)=\varphi(x+y^2)$.

Solución. La ecuación diferencial dada no es exacta, buscamos si tiene un factor integrante: ensayamos con (problema 3)

$$\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{2yM(x,y)-N(x,y)}=\frac{2y-1}{(x+2y^2)(2y-1)}$$
$$=\left(\frac{1}{x+y^2}\right)=f(x+y^2),$$

según problema 3, al depender sólo $x+y^2=z$ hay un factor integrante y es

$$\mu(z)=\exp\left(\int\frac{1}{z}dz\right)=x+y^2.$$

Multiplicando por $\mu(z)$ a la ecuación diferencial dada se obtiene la ecuación diferencial exacta

$$(3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)dx+(x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+5y^4)dy=0,$$

y al ser exacta, hallamos la función potencial,

$$x^3+x^2y+4x^2y^2+2xy^3+xy^4+y^5=c. \blacksquare$$

Ejemplo 21. Resuelva la ecuación

$$tdx+xdt+(3t^3x^4)dx=0,$$

si tiene un factor integrante de la forma $\mu=\mu(tx^2)$.

Solución. Usamos el problema 4, si la ecuación un factor integrante de la forma $\mu=\mu(tx^2)$ se cumple

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)}=\frac{\frac{\partial N(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial M(t,x)}{\partial x}}{2txM(t,x)-x^2N(t,x)}=f(tx^2).$$

En efecto

$$\frac{\frac{\partial N(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial M(t,x)}{\partial x}}{2txM(t,x)-x^2N(t,x)}=\frac{9t^2x^4}{tx^2-3t^3x^6}=\frac{9tx^2}{1-3(tx^2)^2}$$

al ser $z=tx^2$, tenemos como factor integrante

$$\mu(z)=exp\left(\int\frac{9z}{1-3z^2}dz\right)=\frac{1}{(1-3z^2)^{3/2}}$$

es decir $\mu(tx^2)=\frac{1}{(1-3t^2x^4)^{3/2}}$. Multiplicando la ecuación diferencial dada por el factor integrante $\mu(tx^2)$ se obtiene una ecuación exacta

$$\frac{x}{(1-3t^2x^4)^{3/2}}dt+\frac{t+3t^3x^4}{(1-3t^2x^4)^{3/2}}dx=0,$$

cuya solución general es

$$\frac{tx}{\sqrt{1-3t^2x^4}}=c. \blacksquare$$

PROBLEMAS 2.2

1. Determine la solución general de las ecuaciones diferenciales:
   a) $(5t^3+3tx+2x^2)dt+(t^2+2tx)dx=0;\ x(-1)=1.$
      R. $t^5+t^3x+t^2x^2=-1.$
   b) $tdx+xdt+3t^3x^4dx=0.$
   c) $6xydx=(-4y-9x^2)dy.$
      R. $3x^2y^3+y^4=c\ ;\ \mu(y)=y^2.$
   d) $\frac{x}{t}dt+(x^3-\ln(t))dx=0.$
      R. $\ln(x)+\frac{y^3}{2}=cy.$
   e) $(x+y)dx+xln(x)dy=0\ ,\ 0<x<\infty.$
      R. $x+yln(x)+c=0;\ \mu(x)=\frac{1}{x}.$
   f) $[y+(x^2+y^2)^2]dx+[y(x^2+y^2)^2-x]dy=0.$
      R. $Arctan\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=k;\ \mu(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}.$
   g) $e^xsen(y)-\tan(y)+\frac{dy}{dx}=0.$
   h) $(1-yx^2)dx+x^2(y-x)dy=0.$
      R. $\mu(x)=\frac{1}{x^2},\ -\frac{2}{x}-2xy+y^2=c.$
   i) $2xyln(y)dx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0.$
   j) $(3t^2+x)dt+(t^2x-t)dx=0.$
   k) $(xy+y+y^2)dx+(x+2y)dy=0.$
      R. $xy+y^2=ce^{-x},\ \mu(x)=e^x.$

l) $(x + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0.$
R. $\mu = \mu(y^2 - x^2)$

m) $2xyln(y)dx + \left(x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1}\right)dy = 0.$

n) $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0.$
R. $\mu = \mu(x^2 + y^2); \frac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = c.$

o) $(tx^2 - x^3)dt + (1 - tx^2)dx = 0.$
R. $\mu(x) = \frac{1}{x^2}, \frac{t^2}{2} - \frac{1}{x} - tx = c.$

p) $(x^2 + 2tx)dt - t^2dx = 0).$

q) $(3x^2tany - 2y^2)dx + (x^6sec^2y + 3xy^2 + 4x^3y^3)dy = 0.$
R. $\mu(x) = x^{-3}, x^{-2}y^3 + y^4 + x^3tany = c.$

r) $(t^4 - t + x)dt - tdx = 0.$

s) $(1 - xy)dx + (xy - x^2)dy = 0.$
R. $\mu(x) = \frac{1}{x}, ln|x| - xy + \frac{y^2}{2} = c.$

t) $(y^3 - lnx)dy + \frac{y}{x}dx = 0.$
R. $\mu(y) = \frac{1}{y^2}, \frac{y^2}{2} + \frac{lnx}{y} = c.$

2. Integre la ecuación diferencial $(t^2 - x^2 + 1)dt + (t^2 - x^2 - 1)dx = 0$ asumiendo que admite un factor integrante que depende de una combinación lineal de t, x.
3. Dada la ecuación diferencial $(nx + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + my^2)dy = 0.$ Determine n, m de modo que $\mu = \varphi(x + y^2)$ sea un factor integrante.
R. $m = 5, n = 3.$
4. Resuelve la ecuación diferencial $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$ si su factor integrante es de la forma $\mu(x^2 + y^2)$.
5. Integra la ecuación diferencial $(x^2 - tx)dt + t^2dx = 0$ sabiendo que existe un factor integrante que es función de tx^2.
6. Halle los valores de m y n de forma tal que $\mu(x, y) = x^m y^n$ sea un factor integrante de la ecuación diferencial $(2y^2 + 4x^2y)dx + (4xy + 3x^3)dy = 0.$
R. $\mu(x, y) = xy^2, x^2y^4 + x^4y^3 = c.$
7. Determine un factor integrante de la forma $\mu(x^2 - t^2)$ para resilver la ecuación diferencial $(x^2 + t^2 + 1)dt = 2txdx.$
8. Halle los valores de m y n de forma tal que $\mu(x, y) = x^m y^n$ sea un factor integrante de la ecuación diferencial $(2y^2 - 6xy)dx + (3xy - 4x^2)dy = 0.$

9. Halle los valores de m y n de forma tal que $\mu(x,y) = x^m y^n$ sea un factor integrante de la ecuación diferencial $\frac{2y}{x}dx + (y^2x^{-2} - 1)dy = 0$.
10. Determine un factor integrante de la forma $\mu(xy)$ para resolver la ecuación diferencial $(y - xy^2\ln(x))dx = -xdy$.
11. Dada la ecuación diferencial $(4t + 3x^2)dt + 2txdx = 0$, hallar un factor integrante de la forma t^n, resuelve la ecuación resultante.
    R. $t^4 + t^3x^2 = c$.
12. Pruebe que $\mu(x) = x^n$ es un factor integrante de $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$, cuando $\frac{\partial N(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = n\frac{M(t,x)}{x}$.
13. Resuelve la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = \frac{2x}{t} + \frac{t^3}{x} + tTan\left(\frac{x}{t^2}\right)$ realizando el cambio de variable $x = tz^m$, eligiendo un valor de m.
14. La ecuación diferencial $e^x sen(y) - \tan(y) + \frac{dy}{dx} = 0$ tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = e^{-mx}\cos(y)$. Obtener m para resuelve la ecuación diferencial.
15. Resuelve la ecuación $(3y + 4xy^2)dx + 2xdy = -3x^2ydy$ buscando un factor integrante de la forma $u(x,y) = x^p y^q$.
16. Determine un factor integrante de la forma $u(x,y) = x^m y^n$ para resolver la ecuación diferencial $(4xy + 3y^4)dx + (2x^2 + 5xy^3)dy = 0$.
    R. $x^4y^2 + x^3y^5 = c$.
17. Dada la ecuación $(x + tf(t^2 + x^2)dt + (xf(t^2 + x^2) - t)dx = 0$. Demuestre que esta ecuación no es exacta, sin embargo tiene un factor integrante $\mu(t,x) = \frac{1}{t^2+x^2}$.

2.4 ECUACIONES SEPARABLES

Las ecuaciones diferenciales separables de primer orden son las más sencillas de resolver, al menos en teoría, muchos problemas simples son del tipo variable separable.

Definición 2.6. Una ecuación de la forma

$$F(x)G(y)dx + f(x)g(y)dy = 0 \qquad (s)$$

se denomina ecuación de variables separables.

Este tipo de ecuaciones en general no son exactas, sin embargo tiene una función $\mu(x,y)=\frac{1}{f(x)G(y)}$ como un factor integrante, pues si multiplicamos $\mu(x,y)$ en la ecuación (s) se reduce a,

$$\frac{F(x)}{f(x)}dx+\frac{g(y)}{G(y)}dy=0,$$

y es exacta ya que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=0=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

donde $M(x,y)=\frac{F(x)}{f(x)}$ y $N(x,y)=\frac{g(y)}{G(y)}$. La familia uniparamétrica de soluciones es,

$$\int\frac{F(x)}{f(x)}dx+\int\frac{g(y)}{G(y)}dy=c,$$

donde c es una constante arbitraria.

Observación. El hecho de haber multiplicado por el factor integrante $\mu(x,y)=\frac{1}{f(x)G(y)}$ es posible que se haya perdido o ganado soluciones en este proceso, ahora si escribimos la ecuación en la forma

$$\frac{dy}{dx}=\frac{F(x)G(y)}{f(x).g(y)}$$

vemos que si $y_0\in\mathbb{R}$ tal que $G(y_0)=0$, así $y=y_0$ es una solución constante de la ecuación diferencial. Otra forma de escribir una ecuación separable es $\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}$.

Teorema 2.5. Sean $f\colon I_1\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g\colon I_2\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones continuas tales que $g(x)\neq 0$, $\forall x\in I_2$. Si $(x_o,y_0)\subset I_1xI_2$, existe una única función $u\colon I\to\mathbb{R}$, con $x_0\in I$, solución del problema de valor inicial

$$y'=\frac{f(x)}{g(y)},\ y(x_0)=y_0,$$

definida explícitamente por la ecuación

$$\int_{y_0}^{u(y)}g(s)ds=\int_{x_0}^{x}f(s)ds.$$

Demostración. Resolver el problema propuesto de valor inicial, consiste en probar que existe una única solución $u\in C'(I)$, con $u(x_0)=y_0$, cumple que

$$g(u(x)u'(x)=f(x),\ x\in I \qquad (1)$$

con esto, (1) es lo mismo que $\frac{d}{dx}F\big(u(x)\big)=\frac{d}{dx}G(x)$, lo que integrando en x nos da

$$F\big(u(x)\big)=G(x)+c,\ \ x\in I.$$

Al hacer que cumpla $u(x_0) = y_0$ concluimos que $c = 0$ y $F\big(u(x)\big) = G(x)$. Por tanto finalizamos si encontramos una función u tal que $F\big(u(x)\big) = G(x)$ con $u(x_0) = y_0$. Sea ahora la función

$$R(x, y) = F(y) - G(x),$$

y vemos que la ecuación $R(x, y) = 0$ define una única función $u: I \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in I$ y derivable en I tal que $R(x, u(x)) = 0$ más $u(x) = 0$ y $u(x_0) = y_0$. Además, en este caso

$$\frac{d}{dx} R\big(x, u(x)\big) = 0,$$

es decir

$$\frac{\partial}{\partial x} R\big(x, u(x)\big) + \frac{\partial}{\partial y} (R\big(x, u(x)\big) u'(x) = 0$$

$$g\big(u(x)\big) u'(x) = f(x)$$

ya que

$$\frac{\partial}{\partial y} (R(x, y) = g(y) \text{ y } \frac{\partial}{\partial x} R(x, y) = -f(x).$$

La existencia y unicidad de la función u es una consecuencia inmediata del teorema de la función implícita, en vista que $R \in C'(I_1 x I_2)$ y cumple

$$R(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y_0} g(s) ds - \int_{x_0}^{x_0} f(s) ds = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} R(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)} = g(y_0) \neq 0 \text{ por hipótesis.}■$$

La demostración del teorema sirve de fundamento para resolver la ecuación diferencial separable.

Ejemplo 22. Resuelve la ecuación

$$(x - 3) y^2 dx - x^2 (y^2 - 2) dy = 0.$$

Solución. La ecuación es separable, multiplicamos por $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}$ en la ecuación para obtener,

$$\left(\frac{x-3}{x^2}\right) dx - \left(\frac{y^2-2}{y^2}\right) dy = 0,$$

integrando $\int \left(\frac{x-3}{x^2}\right) dx - \int \left(\frac{y^2-2}{y^2}\right) dy = c$

obtenemos la familia uniparamétrica de soluciones,

$$Ln|x| + \frac{3}{x} - y - \frac{2}{y} = c$$

donde c es una constante arbitraria. ■

Al dividir por x^2y^2 se ha supuesto que $x^2 \neq 0$, $y^2 \neq 0$, vemos que $y = 0$ de $y^2 = 0$ no es un miembro de la familia uniparamétrica. Sin embargo, si escribimos la ecuación original en forma de derivadas se tiene,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-3)y^2}{x^2(y^2-2)},$$

de donde es evidente que $y = y_0 = 0$ es una solución constante de la ecuación original. No obstante que es una solución que se había perdido en el proceso de separación.

Ejemplo 23. Resolver el problema de valor inicial de la ecuación

$$2xsenydx + 2(x^2+3)cosydy = 0$$

con la condición $y(0) = \frac{3\pi}{2}$.

Solución. Multiplicando por $\mu(x,y) = \frac{1}{(x^2+3)seny}$ se obtiene,

$$\frac{2x}{x^2+3}dx + \frac{2cosy}{seny}dy = 0,$$

entonces integrando

$$\int \frac{2x}{x^2+3}dx + 2\int \frac{cosy}{seny}dy = c_0,$$

de donde $Ln[(x^2+3)sen^2y] = c_0$. Por tanto, la solución uniparamétrica es,

$$(x^2+3)sen^2y = c,\ c = e^{c_0}.$$

La condición inicial $y(0) = \frac{3\pi}{2}$ da $c = (0^2+3)sen^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, es decir $c = 3$, por tanto la solución al problema de valor incial es,

$$(x^2+3)sen^2y = 3. \blacksquare$$

Es claro que en el proceso de separación, hemos supuesto que $seny \neq 0$, pero vemos que las soluciones $seny = 0$ dadas por $y = n\pi, n \in Z$ satisface la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xseny}{(x^2+3)cosy},$$

luego $y = n\pi$ con $n \in Z$ son soluciones constantes de la ecuación. Aunque en realidad no se había perdido soluciones, ya que $y = n\pi$ es solución de la familia uniparamétrica para $c = 0$.

Ejemplo 24. Resuelve el problema de valor inicial

$$x(1+y^2) + y(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 0 \text{ con } y(0) = 1.$$

Solución. Tenemos una ecuación de variable separable con factor integrante dado por

$$\mu(x,y) = \frac{1}{(1+y^2)(1+x^2)},$$

la ecuación separable es,

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0,$$

integrando, $\int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{y}{1+y^2}dy = c$ de donde $\frac{1}{2}ln(1+x^2) + \frac{1}{2}ln(1+y^2) = c$,

$ln[(1+x^2)(1+y^2)] = 2c$, exponenciando se obtiene $(1+x^2)(1+y^2) = e^{2c}$.

Por lo tanto $(1+x^2)(1+y^2) = k$ si $k = e^{2c}$.■

Ejemplo 25. Resuelve el problema de valor inicial,

$$(1+x)\frac{dy}{dx} - 1 = 0; y(0) = 1.$$

Solución. Para $x \neq -1$, se tiene que $1 + x \neq 0$, luego se puede dividir por $(1+x)$ en ambos miembros de la ecuación, para obtener una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1},$$

integrando en ambos miembro para cualquier intervalo que no contenga a $x = -1$; se obtiene

$$y(x) = ln|1+x| + c.$$

Para obtener la solución particular que cumpla $y(0) = 1$, se impone la condición y se despeja c; es decir $1 = ln|1+0| + c$, así $c = 1$. Por tanto, la solución del problema de valor inicial

$$y(x) = ln(1+x) + 1, \forall x \in \langle -1, +\infty \rangle.■$$

Ejemplo 26. Resuelve el siguiente problema de valor inicial,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2; y(0) = 0.$$

Solución. Separando las variables e integrando en ambos lados se tiene

$$\int \frac{1}{1+y^2}dy = \int dx + c,$$

donde

$$\arctan(y) = x + c.$$

En este caso se puede despejar la variable y en esta expresión y se obtiene

$$y(x) = \tan(x+c).$$

Imponiendo ahora la condición inicial $y(0) = 0$, se tiene $0 = \tan(c)$, así $c = 0$. Por tanto, la solución buscada es

$$y(x) = \tan(x),$$

que está bien definida en el intervalo $I = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. En general está bien definida en un intervalo de la forma $\langle (2n-1)\frac{\pi}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{2} \rangle$, $n \in Z$; pero, sólo el intervalo $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ contiene al punto $x = 0$ que es donde se impone la condición. ■

Ejemplo 27. Resuelve la ecuación

$$3e^t \tan(y)\, dt + (2 - e^t)sec^2(x)dx = 0.$$

Solución. Separando variables queda

$$\frac{3e^t}{2-e^t}dt+\frac{sec^2(x)}{\tan(x)}dx=0,$$

al integrar se obtiene la solución $\frac{\tan(x)}{(2-e^x)^3}=c$.

Cabe observar que el factor $\tan(x)\,(2-e^t)=0$ si $t=\ln(2)$ y $x=m\pi$, $m\in z$, que sustituirlas en la ecuación original se verifica que son soluciones, pero se obtienen de la solución general considerando $c=+\infty$ y $c=0$, respectivamente.■

Ejemplo 28. La pendiente de la familia de curvas es

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3t+tx^2}{2x+t^2x},$$

encuentre el miembro de la familia que pasa por el punto (2,1).

Solución. La ecuación al ser tipo variable separable se escribe

$$\frac{x}{3+x^2}dx=-\frac{t}{2+t^2}dt,$$

integrando resulta

$$ln(3+x^2)+ln(2+t^2)=c,$$
$$(3+x^2)(2+t^2)=c.$$

Evaluando en el punto (2, 1), se obtiene $c=24$, con el cual el miembro de la familia buscada es

$$(3+x^2)(2+t^2)=24.■$$

Ejemplo 29. Resuelve el problema de valor inicial

$$x(1+y^2)+y(1+x^2)\frac{dy}{dx}=0$$

con $y(1)=1$.

Solución. Separando variables se obtiene,

$$\frac{x}{1+x^2}dx+\frac{y}{1+y^2}dy=0,$$

integrando

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{y}{1+y^2}dy=c.$$

La solución es

$$\frac{1}{2}Ln(1+x^2)+\frac{1}{2}Ln(1+y^2)=c,$$

o bien

$$(1+x^2)(1+y^2)=c_1$$

donde se han acumulado las constantes $c_1=e^{2c}$. Ahora considerando la condición inicial $y(1)=1$ se tiene $c_1=(1+1^2(1+1^2)=4$, por lo tanto la solución final es

$$(1+x^2)(1+y^2)=4.\ ■$$

Es preciso observar que una solución explícita de esta ecuación es la función

$$y = \sqrt{\frac{4}{1+x^2} - 1} \text{ o bien } y = -\sqrt{\frac{4}{1+x^2} - 1},$$

dentro de un rectángulo donde $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, $y \in [0, \sqrt{3}]$ o $y \in [-\sqrt{3}, 0]$.

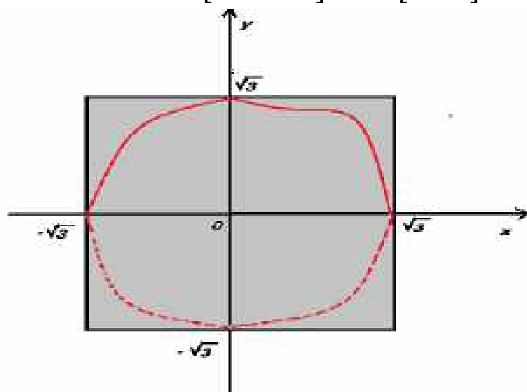


Figura 2.1: El punto (1,1) está en este rectángulo.

PROBLEMAS 2.3

1. Determine la solución general de las ecuaciones diferenciales.
   a) $x(t^2 + 3t + 2)dx = -(t+4)(x^2+1)dt$.
      R. $(t+1)^6(x^2+1) = c(t+2)^4$.
   b) $tx' + x = x^2$.
      R. $x(t) = \frac{1}{1-ct}, x = 0$.
   c) $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{t^2+t^2x^2}{x^2+t^2x^2}}$.
   d) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$.
      R. $\left(\frac{x+4}{y+3}\right)^5 = ce^{x-y}$.
   e) $x'\sqrt{t^2+1} = te^{-x}$.
   f) $x^2\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{1+3y^2}$.
      R. $y + y^3 - x + \frac{1}{x} = c$.
   g) $y' = r(y-m)(y-n)$.
      R. $y + m + \frac{n-m}{1-ce^{r(n-m)x}}$.
   h) $y^2 + y = (x^2 - x)\frac{dy}{dx}$.
      R. $xy = c(x-1)(y+1)$.
   i) $3e^t \tan(y)\, dt + (2 - e^t)sec^2(x)dx = 0$.

j) $x(y^2-1)dx=(x^2-1)ydy$.
R. $x^2-1=c(y^2-1)$.

k) $(y^2-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=-xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.
R. $y^2-x^2=k, xy=c$.

l) $2\left(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2}\right)dx+x^3dy=0$.
R. $ln|x|-\frac{1}{2}ln\left|csc\left(arctan\left(\frac{1}{x^2y}\right)\right)-cot\left(arctan\left(\frac{1}{x^2y}\right)\right)\right|=c$.

2. Considerando $m,n,q\in IN$, integra la ecuación diferencial $y'=-1+\frac{(x+y)^n}{(x+y)^q+(x+y)^m}$.
3. Utilice la sustitución $tx=y$ para resolver la ecuación $(t^2x^2+1)dt+2t^2dx=0$.
4. La ecuación $\frac{dx}{dt}=\frac{4x^2-t^4}{4tx}$ no separable. Demuestre que la transformación $x=vt$ convierte la ecuación en otra de variable separable. Calcule la solución general.
5. Determine la ecuación de una curva que pasa por el punto (0,4) y que la pendiente de la recta tangente en cada uno de sus puntos es igual a la ordenada del punto aumentado en cinco unidades.
R. $y(x)=9e^x-5$.
6. La ecuación de la forma $\frac{dx}{dt}=\frac{xf(tx)}{tg(tx)}$, demuestre que la transformación $v=tx$ convierte la ecuación en otra de variable separable.
7. Determine la solución general d2e las ecuaciones diferenciales:
a) $\frac{dx}{dt}=\frac{x-tx^2}{t+t^2x}$ b) $\frac{dx}{dt}=\frac{1-tx+x^2t^2}{t^2-t^3x}$
8. Dada la ecuación diferencial $(e^t+1)xx'=e^t$ obtener la solución particular que pasa por (0,0).
9. Resuelve el problema de valor inicial.
a) $(3t+8)(x^2+4)dt=4x(t^2+5t+6)dx), x(1)=2$.
R. $(t+3)(t+2)^2=\frac{9}{16}(x^2+4)^2$.
b) $(1+x)\frac{dy}{dx}-1=0\ , y(0)=1$.
c) $e^{-x}yy'=\frac{1}{1+e^x}\ , y(0)=2$
R. $y^2=2ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)+2$.
d) $y'=\frac{1}{y}+y\ , y(0)=b\ \ (b>0)$.

R. $y(x) = +\sqrt{(b^2+1)e^{2x}-1}$.

e) $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$; $y(0) = 0$.

f) $(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x,\ y(0) = 1$.

R. $y^2 = 2ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) + 1$.

2.5 ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Existen algunas ecuaciones diferenciales que al hacer un cambio de variable apropiado se reducen a ecuaciones en variables separadas. Antes de estudiar las ecuaciones diferenciales homogéneas es necesario definir lo que se entiende por una función homogénea.

Definición 2.7. Una función $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado n, si:

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x,y),\ (x,y) \in D, \lambda > 0.$$

Ejemplo 29. La función $F(x,y) = \frac{2}{\sqrt{x+y}}$ es homogénea de grado $\frac{1}{2}$.

Ejemplo 30. Las funciones $F(x,y) = 5e^{\frac{x}{y}},\ F(x,y) = \frac{x^3-2y^3}{x^3+xy^3},\ F(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ son homogéneas de grado cero.

Ejemplo 31. Las funciones $F(x,y) = x^3 + 2y^3, F(x,y) = 5x^2y, F(x,y) = 3xy^2 - 2x^2y$ son homogéneas de grado 3.

Definición 2.8. Se dice que la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \text{(h)}$$

es homogénea si escrita en la forma de derivada $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, existe una función h tal que $f(x,y) = h\left(\frac{y}{x}\right)$, es decir cuando $f(x,y)$ puede ser expresada en la forma de $h\left(\frac{y}{x}\right)$.

Observación. Aquí $(x,y) \in D$ entonces $(\lambda x, \lambda y) \in D$. Además F es de grado de homogeneidad cero si, $F(\lambda x, \lambda y) = F(x,y)$. Supongamos ahora que las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ en la ecuación (h),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y), \qquad (1)$$

son ambas homogéneas y del mismo grado n, entonces

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x,y),$$

tomemos $\lambda = \frac{1}{x}$, entonces

$$M\left(1,\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^n M(x,y).$$

Del mismo modo $N\left(1,\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^n N(x,y)$, entonces la ecuación (1) se escribe como,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^0M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{N\left(1,\frac{y}{x}\right)}=f(1,\frac{y}{x}),$$

esta función es precisamente $h\left(\frac{y}{x}\right)$.

Teorema 2.6. Si la ecuación

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

es homogénea (grado cero), entonces el cambio de variable $y=tx$, $\left(t=\frac{y}{x}\right)$ transforma en una ecuación separable en las variables t y x.

Demostración. La ecuación es homogénea, entonces,

$$\frac{dy}{dx}=h\left(\frac{y}{x}\right)=h(t), \text{pues } t=\frac{y}{x}. \qquad (1)$$

Sea $y=tx$ derivando respecto a x se obtiene,

$$\frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx}, \qquad (2)$$

de (1) y (2) se tiene

$$h(t)=t+x\frac{dt}{dx},$$

y es una ecuación de variable separable de la forma

$$[t-h(t)]dx+xdt=0,$$

es decir

$$\frac{dx}{x}+\frac{dt}{t-h(t)}=0. \blacksquare$$

La solución ahora es conocida por integración

$$\int\frac{dx}{x}dx+\int\frac{dt}{t-h(t)}=c,$$

donde c es una constante arbitraria, ahora si hacemos que $G(t)=\int\frac{dt}{t-h(t)}$, entonces la solución uniparamétrica toma la forma

$$G\left(\frac{y}{x}\right)+Ln|x|=c,$$

sólo falta verificar si $t-h(t)=0$ es solución.

Ejemplo 32. Resuelve la ecuación

$$(2xy+y^2)dx-x^2dy=0.$$

Solución. Para $D\subset\mathbb{R}^2$. La ecuación es homogénea, escribiendo,

$$\frac{dy}{dx}=2\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

para $x \neq 0$, $t = \frac{y}{x}$, según el teorema 2.4, esta ecuación queda,

$$\frac{dy}{dx} = 2t + t^2\,, \qquad (1)$$

de $y = tx$ se tiene

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx} \qquad (2)$$

comparando (1) y (2) tenemos

$$t + x\frac{dt}{dx} = 2t + t^2\,,$$

lo cual es separable,

$$\frac{dt}{t(t+1)} = \frac{dx}{x},\ \ t \neq 0,\ t+1 \neq 0$$

integrando se tiene

$$\int \frac{dt}{t(t+1)} - \int \frac{dx}{x} = c \ \text{ de donde}$$

$$\frac{|t|}{|t+1||x|} = e^c, \qquad \frac{t}{t+1} = c_1 x$$

donde $c_1 = \pm e^c$.

Haciendo $t = \frac{y}{x}$ la solución uniparamétrica es

$$\frac{y}{y+x} = c_1 x\,,$$

o bien

$$\frac{yx+x^2}{y} = k \qquad \frac{1}{c_1} = k\,. \qquad (3)$$

Ahora $t + 1 = 0$ entonces $\frac{y}{x} + 1 = 0$ se tiene $y = -x$ es solución de (3) para $k = 0$; para $t = 0, \frac{y}{x} = 0$ entonces $y = 0, x \neq 0$ se tiene que $\frac{dy}{dx} = 0$, entonces $y = 0, x \neq 0$ es una solución constante de la ecuación.■

Ejemplo 33. Resuelve la ecuación

$$(2x^2 - 6y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Solución. Esta ecuación es homogénea, pues se escribe

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{y}{x}} + 3\left(\frac{y}{x}\right),$$

haciendo $y = tx$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}, \text{ esto es } \ t + x\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t} + 3t,$$

es decir

$$x\frac{dt}{dx} = -= -\frac{1}{t} + 2t$$

es separable,

$$\frac{t}{2t^2-1}dt = \frac{dx}{x}$$

integrando resulta

$$\frac{1}{4}Ln|2t^2-1| = Ln|x| + Ln|k|,$$

entonces, $|2t^2-1| = |kx|^4$, sustituyendo $t = \frac{y}{x}$ para llevar la solución a las variables inicial x, y,

$$\left|2\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)\right| = |kx|^4, \text{ si } 2y \geq x > 0,$$

las soluciones adoptan las formas,

$$2y^2 - x^2 = cx^6.\blacksquare$$

Vemos que si $2t^2-1=0$, $2y^2-x^2=0$ es solución para $c=0$ de manera que no se perdió soluciones en el proceso de separación.

Ejemplo 34. Resuelve la ecuación

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)dx + \left(\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}\right)dy = 0.$$

Solución. La ecuación es homogénea, pues se escribe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}-1}\,,$$

haciendo $y = ux$ se obtiene

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + \sqrt{\frac{1}{u^2}-1},$$

integrando,

$$\int \frac{udu}{\sqrt{1-u^2}\left(1+\sqrt{1-u^2}\right)} = \int\frac{dx}{x} + Ln|c|,$$

donde c es una constante arbitraria,

$$ln\left|\frac{1}{1+\sqrt{1-u^2}}\right| = Ln|cx|$$

entonces

$$\left|\frac{1}{1+\sqrt{1-u^2}}\right| = Ln|c|$$

y sustituyendo $u = \frac{y}{x}$ se obtiene

$$\left|\frac{x}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\right| = |cx| \text{ si } x > 0,\ x^2-y^2 \geq 0,$$

entonces la solución uniparamétrica es

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}} = c.\blacksquare$$

Ejemplo 35. Determine el espacio de soluciones de la ecuación diferencial

$$(2x^2 - 6y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Solución. La ecuación es homogénea, pues se escribe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}} \qquad (1)$$

haciendo $y = xu$ donde $\left(u = \frac{y}{x}\right)$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \qquad (2)$$

de (1) en (2) resulta la ecuación

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{-1-3u^2}{u}$$

integrando $\int \frac{u}{1+4u^2} = -\int \frac{dx}{x} + c,$

$$\frac{1}{8}ln|1+4u^2| = ln|x| + c, \text{ pero } u = \frac{y}{x},$$

entonces $x^2 + 4y^2 = c_1 x^{-6},\ c_1 = e^{8c}$.■

Ejemplo 36. Encuentre el espacio de soluciones de la ecuación

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0.$$

Solución. La ecuación es homogénea, pues se escribe

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-\frac{y}{x}} \qquad (1)$$

haciendo $y = xu$ donde $\left(u = \frac{y}{x}\right)$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \qquad (2)$$

de (1) en (2) resulta la ecuación

$$u + x\frac{du}{dx} = -\frac{1+u^2}{1-u}$$

integrando

$$\int \frac{1-u}{1+u}du = -\int \frac{dx}{x} + c,$$

$$-u + 2ln|1+u| = -ln|x| + c,$$

pero $u = \frac{y}{x}$, entonces

$$2ln\left|\frac{y}{x}+1\right| - \frac{y}{x} + ln|x| = c.■$$

Ejemplo 37. Resuelve la ecuación diferencial

$$(t^2 + x^2)dt + txdx = 0.$$

Solución. Se trata de una ecuación diferencial homogénea, haciendo la sustitución $x = tu$ se escribe

$$-u-\frac{1}{u}=u+t\frac{du}{dt}$$
$$\frac{1}{t}dt+\frac{u}{1+2u^2}du=0,$$
integrando y volviendo a las variables t y x se obtiene
$$ln|t|+\frac{1}{4}ln\left|1+2\left(\frac{x}{t}\right)^2\right|=c,$$
exponenciando
$$t^4+2t^2x^2=k,$$
se observa que $t=0$ es una solución singular de la ecuación diferencial dada. ■

Ejemplo 38. Resuelva la ecuación diferencial
$$tx'=\sqrt{t^2-x^2}+x.$$
Solución. Se trata de una ecuación diferencial homogénea, haciendo la sustitución $x=tu$ se escribe
$$\sqrt{1-u^2}+u=u+t\frac{du}{dt}$$
$$-\frac{1}{t}dt+\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=0,$$
integrando y volviendo a las variables t y x se obtiene
$$x(t)=sen(\ln(ct)),$$
se observa que al dividir por el factor $t\sqrt{1-u^2}$ se pudo haber perdido algunas soluciones, pero $x=0$ no es solución y $1-\left(\frac{t}{x}\right)^2=0$ implica que $x=\pm t$ son soluciones singulares. ■

Ejemplo 39. Supongamos que la ecuación
$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$
es homogénea. Demostre que la transformación $x=rcos\theta,\ y=\ rsen\theta$ reduce esta ecuación a una ecuación de variable separable en las variables r,θ.

Demostración. La ecuación es homogénea y se escribe,
$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)=g(tan\theta)$$
en función de θ, entonces
$$g(tan\theta)dx-dy=0. \qquad (1)$$
Por otro lado de $x=rcos\theta,\ y=\ rsen\theta$ diferenciando se obtiene
$$dx=-rsen\theta d\theta+cos\theta dr,\ dy=rcos\theta d\theta+sen\theta dr,$$
llevando en (1) se obtiene,
$$g(tan\theta)(-rsen\theta d\theta+cos\theta dr)-(rcos\theta d\theta+sen\theta dr)=0,$$
$$-[g(tan\theta)sen\theta+cos\theta]d\theta+[g(tan\theta)cos\theta-sen\theta]dr=0,$$

separando variables, resulta,

$$\left(\frac{g(tan\theta)sen\theta+cos\theta}{sen\theta-g(tan\theta)cos\theta}\right)d\theta+\frac{1}{r}dr=0,$$

donde $\mu(\theta)=\frac{1}{r(sen\theta-g(tan\theta)cos\theta)}$ es un factor integrante para esta ecuación. ■

PROBLEMAS 2.4

1. Halle la solución general de las ecuaciones.
   a) $(xt+x^2+t^2)dt-t^2dx=0.$
   b) $y'=\frac{x^2+y^2}{xy}.$
   c) $(x^2-y^2)dx+2xydy=0\,.$
   R. $x^2+y^2=cx.$
   d) $(4yx^2+12y^3)dx=(x^3-6xy^2)dy.$
   e) $\frac{dy}{dx}=sen(\frac{y}{x}).$
   f) $\left(x+\sqrt{t^2+x^2}\right)dt-tdx=0.$
   g) $x(t^2+2x^2)x'+t(2t^2+x^2)=0.$
   R. $t^4+t^2x^2+x^4=c.$
   h) $(t^4+x^4)dt-2t^3dx=0.$
   i) $\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)dx+\left(\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}\right)dy=0.$
   j) $(2tx+3x^2)dt-(2tx+t^2)dx=0.$
   R. $x^2+tx=ct^3.$
   k) $(2x+3y)dx+(y-x)dy=0.$
   l) $\left(t^3+x^2\sqrt{t^2+x^2}\right)dt-tx\sqrt{t^2+x^2}dx=0.$
   R. $(t^2+x^2)^{3/2}=t^3ln(ct^3)\,.$
   m) $y'=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$
   n) $2x+y+\left(2ye^{\frac{y}{x}}-x\right)y'=0\,.$
   R. $y^2+x^2e^{-\frac{y}{x}}=c\,.$
2. Integre la ecuación diferencial $(1-t^2x^2)x'=2tx^3$ mediante un cambio de variable del tipo $x=y^m$ que la transforme en homogénea.
3. Determine la solución general de las ecuaciones diferenciales:
   a) $\frac{dx}{dt}=\frac{xt-3(x^2+t^2)arctan\left(\frac{x}{t}\right)}{t^2}$
   b) $\frac{dx}{dt}=\frac{x+2te^{-y/x}}{t}$

c) $\frac{dx}{dt}=\frac{t+xsen\left(\frac{x}{t}\right)}{tsen\left(\frac{x}{t}\right)}$.

4. Resuelve el problema de valor inicial:

a) $\frac{dx}{dt}=\frac{t^3+x^3}{tx^2}$, $x(1)=1$.

b) $x^2dt+(t^2+xt+x^2)dx=0, x(0)=1$.

R. $(t+x)\ln(x)+t=0$.

c) $x\frac{dy}{dx}=x-y\,,\; y(2)=2$

R. $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$.

2.6 ECUACIÓN DIFERENCIAL CON COEFICIENTES LINEALES

Las ecuaciones con coeficientes lineales son de la forma

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0\,, \qquad (d)$$

este tipo de ecuaciones se reducen a ecuaciones homogéneas o bien ecuaciones diferenciales separables. Cuando los coeficientes de dx y dy se igualan a cero, las ecuaciones forman rectas secantes o bien rectas paralelas; si son rectas secantes la transformación aplicadas reduce la ecuación en homogéneas, de lo contrario si son rectas paralelas la transformación aplicada reduce a ecuación en separables.

Teorema 2.7. Consideremos la ecuación (d) con a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 constantes reales.

(i) Si $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}$, entonces la transformación

$$\begin{cases}x=u+x_0\\ y=v+y_0\end{cases}$$

donde (x_0,y_0) es la solución del sistema,

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$$

reduce la ecuación (d) a una ecuación homogénea.

(ii) Si $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$, entonces la transformación $u=a_1x+b_1y$ reduce la ecuación (d) a una ecuación separable en las variables x,u.

Demostración.

(i) La condición $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}$ afirma que (x_0,y_0) es solución del sistema

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}, \qquad (c_1)$$

ahora de la transformación $x=u+x_0,\; y=v+y_0$ se tiene

$$dx = du\,,\quad dy = dv$$

reemplazando en la ecuación (d),

$$[a_1(u + x_0) + b_1(v + y_0) + c_1]du + [a_2(u + x_0) + b_2(v + y_0) + c_2]dv = 0,$$

$$[a_1u + b_1v + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)]du + [a_2u + b_2v + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)]dv = 0,$$

se reduce a,

$$(a_1u + b_1v)du + (a_2u + b_2v)dv = 0,$$

lo cual es una ecuación homogénea en las variables u, v.

(ii) La condición $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$ significa que las rectas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases},$$

son paralelas, luego la transformación $u = a_1x + b_1y$, nos da

$$du = a_1dx + b_1dy,\quad y = \frac{1}{b_1}(u - a_1x)$$

sustituyendo en la ecuación (c)

$$\left[a_1x + b_1.\frac{1}{b_1}(u - a_1x) + c_1\right]dx + \left[a_2x + b_2.\frac{1}{b_1}(u - a_1x) + c_2\right]\frac{du - a_1dx}{b_1} = 0,$$

$$(u + c_1)dx + \left(\frac{b_2}{b_1}u + c_2\right)\left(\frac{du}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}dx\right) = 0,$$

de donde, si $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$, resulta una ecuación de variable separable,

$$\left[(1 - k)u + c_1 - \frac{a_1}{b_1}c_2\right]dx + \frac{1}{b_1}(ku + c_2)du = 0\,. \blacksquare$$

Se observa que la condición (i) equivale a,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

similarmente la condición (ii),

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ejemplo 40. Resolver la ecuación diferencial

$$(x + 2y - 1)dx + (x - y + 1)dy = 0.$$

Solución. Vemos que el sistema $x + 2y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ tiene solución única a $x_0 = -\frac{1}{3}$, $y_0 = \frac{2}{3}$. Entonces hacemos un cambio de la forma,

$$x = -\frac{1}{3} + u,\quad y = \frac{2}{3} + v$$

que reemplazando la ecuación se transforma en homogénea,

$$(u + 2v)du + (u - v)dv = 0 \qquad (1)$$

haciendo $v = tu$ se tiene

$$\frac{dv}{du} = t + u\frac{dt}{du} \qquad (2)$$

en (1) se escribe

$$\frac{dv}{du}=\frac{1+2\left(\frac{v}{u}\right)}{1-\frac{v}{u}}=\frac{1+2t}{1-t}, \qquad (3)$$

de (2) y (3) $\frac{1+2t}{1-t}=t+u\frac{dt}{du}$ separando variables e integrando,

$$\int\frac{1-t}{t^2-3t-1}dt=\int\frac{du}{u}+c,$$

usar fracciones parciales

$$\frac{-\sqrt{13}-13}{26}\int\frac{dt}{t-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}+\frac{\sqrt{13}-13}{26}\int\frac{dt}{t-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}}=ln|u|+c,$$

$$\frac{-\sqrt{13}-13}{26}ln\left|t-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right|+\frac{\sqrt{13}-13}{26}ln\left|t-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right|=ln|u|+c,$$

pero $v=tu$ entonces,

$$\frac{-\sqrt{13}-13}{26}ln\left|\frac{v}{u}-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right|+\frac{\sqrt{13}-13}{26}ln\left|\frac{v}{u}-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right|=ln|u|+c,$$

pero $x=-\frac{1}{3}+u,\ y=\frac{2}{3}+v$

$$\frac{-\sqrt{13}-13}{26}ln\left|\frac{3y-2}{3x+1}-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right|+\frac{\sqrt{13}-13}{26}ln\left|\frac{3y-2}{3x+1}-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right|=$$

$$=ln\left|x+\frac{1}{3}\right|+c.\blacksquare$$

Ejemplo 41. Resuelve la ecuación

$$(5x+2y+1)dx+(2x+y+1)dy=0.$$

Solución. Vemos que

$$\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

según el teorema 2.7, buscamos (x_0,y_0) como solución del sistema

$$\begin{cases}5x_0+2y_0=1\\ 2x_0+y_0=1\end{cases},$$

como la solución es $(x_0,y_0)=(1,-3)$, hacemos $x=u+1, y=v-3$, esto reduce la ecuación a homogénea

$$(5u+2v)du+(2u+v)dv=0,$$

haciendo $v=zv$ se obtiene la ecuación separable,

$$z+u\frac{dz}{du}=-\left(\frac{5+2z}{2+z}\right),$$

integrando da como solución,

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+4z+5}}=cu,$$

deshaciendo el cambio $v=zv$, resulta,

$$\frac{1}{\sqrt{v^2+4uv+5u^2}}=c,\quad u\neq 0,$$

finalmente deshaciendo el cambio $u = x - 1,\ v = y + 3$ se tiene la solución general,

$$y^2 + 4xy + 5x^2 + 2x + 2y = c\ .\ ■$$

Ejemplo 42. Resuelve el problema de valor inicial

$$(2x + 3y + 1)dx + (4x + 6y + 1)dy = 0,\ y(1) = 0.$$

Solución. Vemos que

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

según el teorema anterior, hacemos $u = 2x + 3y$, con $du = 2dx + 3dy$, reemplazando en la ecuación

$$-(u - 1)dx + (2u + 1)du = 0,$$

separando variables,

$$\int dx - \int \left(\frac{2u+1}{u-1}\right) du = c,$$

la solución es $x - 2u - 3ln|u - 1| = c$, deshaciendo el cambio $u = 2x + 3y$ se obtiene la solución uniparamétrica

$$-3x - 6y - 3ln|2x + 3y - 1| = c,$$

aplicando la condición inicial $y(1) = 0$ da $c = -3$, finalmente la solución al valor inicial es

$$x + 2y + ln|2x + 3y - 1| = 1\ .\ ■$$

Problema 43. Resuelve $\frac{dy}{dx} = (-5x + y)^2 - 4$.

Solución. Hacemos $u = -5x + y$ de donde $\frac{du}{dx} = -5 + \frac{dy}{dx}$ que reemplazando en la ecuación resulta

$$\frac{du}{dx} + 5 = u^2 - 4,$$

separando variables e integrando

$$\int \frac{du}{u^2-9} = \int dx + c$$

$$\frac{1}{6} ln|u - 3| - \frac{1}{6} ln|u + 3| = x + c$$

$$ln|-5x + y - 3| - ln|-5x + y + 3| = 6x + 6c.$$

Por tanto,

$$\frac{-5x+y-3}{-5x+y+3} = ke^{6x} \text{ siendo } k = e^{6c}.\ ■$$

PROBLEMAS 2.5

1. Resuelve las ecuaciones diferenciales:

a) $y' = \frac{x+y}{x-y-6}$.

b) $(3y - x)y' = 3x - y - 4$.

c) $\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$.

R. $y = -x - 1 + \tan(x + c)$.

d) $x^2y' = (1 + 2x - y)^2$.

e) $x\frac{dy}{dx} - y = \frac{x^3}{y}e^{\frac{y}{x}}$.

R. $x + y = x(c - x)e^{\frac{y}{x}}$; hacer $z = \frac{y}{x}$.

f) $(t - x)^2\frac{dx}{dt} = (t - x + 1)^2$.

g) $\frac{dx}{dt} = \frac{t+x+4}{t-x-6}$

h) $\frac{dx}{dt} = \frac{2t+3x-1}{4t+6x}$

i) $x' = \frac{4t-x+7}{2t+x-1}$.

R. $(t - x + 4)^2(4t + x + 1)^3 = c$.

j) $t - 2x + 3 + (2t - 4x + 5)x' = 0$.

R. $4t + 8x + ln|4t - 8x + 11| = c$.

k) $\frac{dx}{dt} = 2\left(\frac{x+1}{t+x-2}\right)^2$.

R. $ln\left|\frac{x+1}{t(t-3)}\right| + 2arctg\left(\frac{x+1}{t-3}\right) = c$.

l) $x' = \frac{t-x-3}{t+x-1}$.

R. $(x + 1)^2 + 2(x + 1)(t - 2) - (t - 2)^2 = c$.

m) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x-y+7}{2x+y-1}$,

R. $(x - y + 4)^2(4x + y + 1)^3 = c$.

n) $(2x - 4y + 5)y' = -x + 2y - 3$,

R. $4x + 8y + ln|4x - 8y + 11| = c$.

2. Demuestre que la sustitución $u = ax + by$ transforma la ecuación $y' = f(ax + by + c)$, en variables separables.
3. Utiliza el cambio de variable $y = u - x$ para transformar la ecuación $(x + y)dx * dy = 0$ en una ecuación de variables separadas, resuelve la ecuación.
4. Utiliza la transformación $u = \frac{x}{t^n}$ con n apropiado para determinar la solución de las ecuaciones diferenciales:

a) $\frac{dx}{dt} = \frac{2+3tx^2}{4t^2x}$ b) $\frac{dx}{dt} = \frac{1-2tx-2t^2x-2t^3x^3-3t^4x^2}{(1+xt^2)(1+t)t^2}$

5. Demuestre que toda ecuación de la forma $xy' - y = f(x)g(\frac{y}{x})$ se transforma en una de variable separable mediante la sustitución $y = ux$.
6. Resuelve la ecuación $xy' - y = 2x\left(\frac{y^2 - x^2}{x^4 - 1}\right)$.

   R. $y(x) = \frac{x^3 + cx}{1 + cx^2}$.
7. Dada la función $y' = F\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right)$. A) Si $ae \neq bd$, pruebe que las constantes h, k se pueden escoger de tal manera que las sustituciones $x = u - h$; $y = v - k$; reducen esta ecuación diferencial en homogénea. B) Si $ae = bd$ la ecuación diferencial es separable.

***

CAPITULO 3

ECUACIÓN ESCALAR LINEAL Y NO LINEAL DE PRIMER ORDEN

3.1 INTRODUCCIÓN

Estudiamos por separado la solución general de la ecuación escalar lineal y no lineal de primer orden, principalmente por su carácter formativo a la hora de entender cómo está formada la solución general de cualquier ecuación. La mayoría de las ecuaciones que se resuelven mediante cuadraturas pasan por ser previamente, ecuaciones lineales o bien ecuaciones no lineales que se reducen a lineales. Damos aquí algunas ecuaciones que se reducen a lineales. Estas ecuaciones tienen vital importancia, muchas de las aplicaciones que trataremos más adelante se modelan por medio de una ecuación de este tipo.

3.2. ECUACIÓN LINEAL

Definición 3.1. Una ecuación de primer orden es lineal si está en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)\ ,$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas sobre $I = \langle a, b\rangle$.

Observación. La ecuación lineal al escribir en forma de diferenciales

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0,$$

permite estudiar si tiene un factor de integración, al verificar

$$\frac{\partial}{\partial y}[P(x)y - Q(x)] = P(x) \neq 0 = \frac{\partial}{\partial x}(1),$$

se concluye de manera general que la ecuación no es exacta, salvo en que $P(x) \equiv 0$, en cuyo caso la ecuación $\frac{dy}{dx} = Q(x)$ es separable. Sin embargo, veremos que ésta ecuación posee un factor integrante.

Teorema 3.1. La ecuación lineal,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \qquad (\alpha)$$

i) tiene un factor integrante $\mu(x) = exp(\int P(x)dx)$,

ii) tiene una familia solución general a

$$y(x) = exp(-\int P(x)dx)\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c\right].$$

Demostración. i) Escribiendo como

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0,$$

ya verificamos que esta ecuación no es exacta, salvo en que $P(x) \equiv 0$, buscamos un factor integrante $\mu(x)$ que solo dependa de x.

$$[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]dx + \mu(x)dy = 0. \qquad (1)$$

La función $\mu(x)$ será un factor integrante para la ecuación (1) si y solo si la ecuación (1) es exacta, en este caso se cumple,

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)],$$

de donde

$$\mu(x)P(x) = \frac{d}{dx}[\mu(x)],$$

esta ecuación es separable para $P(x)$ conocida,

$$\frac{d\mu}{\mu(x)} = P(x)dx,$$

ahora integrando para μ variable dependiente y con x variable independiente,

$$ln|\mu(x)| = \int P(x)dx \;\text{ es decir }\; |\mu(x)| = e^{\int P(x)dx},$$

Por tanto

$$\mu(x) = exp(\int P(x))dx. \blacksquare$$

ii) Si multiplicamos $\mu(x)$ en la ecuación (α) en ambos miembros se tiene,

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

es decir

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

integrando

$$e^{\int P(x)dx}y = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + c.$$

Finalmente,

$$y(x) = exp(-\int P(x)dx)\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c\right]$$

donde c es una constante arbitraria. ■

Obsérvese que en esta solución

$$y(x) = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}dx\right). \qquad (\alpha_1)$$

El primer sumando representa la solución de la ecuación (α) cuando $Q(x) \equiv 0$, es decir, es la solución general de la ecuación homogénea

$$y' + P(x)y = 0.$$

El segundo sumando es una solución particular de la ecuación (α), puesto que es la que se obtiene cuando la fórmula general (α_1) se hace $c = 0$.

Ejemplo 1. Encuentre la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y + x.$$

Solución. La ecuación se escribe

$$\frac{dy}{dx} - y = x, \text{ con } P(x) = -1 \text{ y } Q(x) = x.$$

Un factor integrante es

$$\mu(x) = e^{-\int dx} = e^{-x},$$

se multiplica en la ecuación para obtener,

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = e^{-x}x\,,$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = e^{-x}x\,,$$

integrando resulta,

$$e^{-x}y = \int e^{-x}x dx + c,$$

por tanto

$$y(x) = -x - 1 + ce^{x}.\blacksquare$$

Ejemplo 2. Resuelve la ecuación

$$x^2 + (3tx - 1)x' = 0.$$

Solución. Es lineal cuando se expresa como $t'(x)$,

$$\frac{dt}{dx} + \left(\frac{3}{x}\right)t = \frac{1}{x^2}$$

se convierte, al multiplicar por el factor integrante $u(x) = \exp(\int \frac{3}{x}dx) = x^3$, en

$$\frac{d}{dy}(x^3 t) = x,$$

cuya solución es

$$x^3 t = \frac{x^2}{2} + c,$$

o sea,

$$t = x^{-3}\left(c + \frac{x^2}{2}\right).\ \blacksquare$$

Ejemplo 3. Obtener la solución general de la ecuación

$$y - xy' = y'y^2e^y.$$

Solución. Se observa que la ecuación no es lineal en $y(x)$, sin embargo

$$y\frac{dx}{dy} = x + y^2e^y,$$

$$\frac{dx}{dy} + \left(-\frac{1}{y}\right)x = ye^y,$$

es lineal en $x(y)$. El factor integrante $u(y) = exp\left(\int\left(-\frac{1}{y}\right)dy\right) = \frac{1}{y}$ nos permite resolver

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{x}{y}\right) = e^y,$$

la solución es

$$x = ye^y + cy. ■$$

Ejemplo 4. Resolver la ecuación

$$y' = -3xy + x.$$

Solución. La ecuación es lineal en x, se escribe como,

$$\frac{dy}{dx} + (3x)y = x \qquad (1)$$

un factor integrante es $u(x) = exp(\int 3xdx) = e^{\frac{3x^2}{2}}$, multiplicando $\mu(x)$ en (1),

$$e^{\frac{3x^2}{2}}\frac{dy}{dx} + (3x)e^{\frac{3x^2}{2}}y = xe^{\frac{3x^2}{2}},$$

es decir

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{3x^2}{2}}y\right) = xe^{\frac{3x^2}{2}}$$

$$e^{\frac{3x^2}{2}}y = \int xe^{\frac{3x^2}{2}}dx + c,$$

entonces

$$y(x) = \frac{1}{3} + ce^{\frac{-3x^2}{2}}.■$$

Ejemplo 5. Halle la solución general de la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} = -4y + 2x^5e^x.$$

Solución. Escribiendo apropiadamente

$$\frac{dy}{dx} + \left(-\frac{4}{x}\right)y = 2x^5e^x,$$

el factor integrante es $u(x) = e^{-4\int\frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^4}$, con lo cual se escribe

$$\frac{y}{x^4} = \int 2xe^x dx = 2xe^x - 2e^x + c.$$

Por tanto, la solución general es

$$y(x) = 2x^5e^x - 2x^4e^x + cx^4. ■$$

Ejemplo 6. Encuentre la solución general de la ecuación

$$tx' - 4x = t^6e^t.$$

Solución. La ecuación es lineal en t, que se escribe como,

$$\frac{dx}{dt} + \left(\frac{-4}{t}\right)x = t^5e^t \qquad (1)$$

un factor integrante es $u(t) = exp\left(\int\left(\frac{-4}{t}\right)dt\right) = \frac{1}{t^4}$,

multiplicando $\mu(t)$ en (1),

$$\frac{1}{t^4}\frac{dx}{dt} + \left(\frac{-4}{t^5}\right)x = te^t,$$

es decir,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^4}x\right) = te^t$$
$$\frac{1}{t^4}x = \int te^t dt + c,$$

finalmente

$$x(t) = t^4(t-1)e^t + ct^4.\blacksquare$$

Ejemplo 7. Determine la solución general de la ecuación

$$(x^2 + x)dy = (x^5 + 3xy + 3y)dx.$$

Solución. La ecuación es lineal en x, se escribe como,

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{-3}{x}\right)y = \frac{x^4}{x+1} \qquad (2)$$

un factor integrante es

$$u(x) = exp\left(\int\left(\frac{-3}{x}\right)dx\right) = \frac{1}{x^3},$$

multiplicando $\mu(x)$ en (2),

$$\frac{1}{x^3}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{-3}{x^4}\right)y = \frac{x}{x+1},$$

es decir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}y\right) = \frac{x}{x+1}$$
$$\frac{1}{x^3}y = \int\frac{x}{x+1}dx + c,$$

La solución final

$$y(x) = x^3(x - ln|x+1| + c).\blacksquare$$

Ejemplo 8. Encuentre la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1-e^{-2x}}{e^x+e^{-x}}.$$

Solución. La ecuación es lineal con factor integrante,

$$u(x) = exp(\int dx) = e^x,$$

multiplicando $\mu(x)$

$$e^x\frac{dy}{dx} + e^x y =,$$

es decir

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$e^x y = \int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx + c,$$

Entonces

$$y(x) = e^{-x}(ln|e^x + e^{-x}| + c).\blacksquare$$

PROBLEMAS 3.1

1. Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ soluciones particulares de la ecuación $x' + P(t)x = Q(t)$, demuestre que la expresión $\frac{x_3(t)-x_1(t)}{x_1(t)-x_2(t)}$ es constante.
2. Sea la ecuación diferencial $2t^2x' = tx + 2tcos(t) - 3sen(t)$, con $x > 0$, analizar el comportamiento de las soluciones cuando $t \to 0$ y cuando $t \to \infty$. ¿Hay alguna solución $x(t)$ tal que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$?
3. Integre la ecuación diferencial $x' + \frac{2x}{t} = 4\cos(3t)$ buscando un factor integrante.
4. Resuelve las ecuaciones diferenciales:

   a) $\frac{dx}{du} + cotux = 5e^{cosu}$

   b) $t^2x' + 3tx = \frac{sent}{t}, t < 0.$

   R. $x = t^{-3}cost + ct^{-3}$

   c) $(1 + senx)dt = [2xcosx - t(secx + tanx)dx].$
5. Halle la solución general de las ecuaciones diferenciales

   a) $y' = \frac{2}{2x-y^2}.$

   b) $(x + 2)\frac{dx}{dt} = -(2t + 3x).$

   c) $t\frac{dx}{dt} = -\frac{2t+1}{t+1}x + t - 1.$

   R. $3(t^2 + t)x = t^3 - 3t + k.$

   d) $\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{t} = 6t^2.$

   R. $x(t) = t^3 + ct^{-3}.$

   e) $\cos(t)\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}sen(t) = 1.$

   R. $2tsen(x) - t^2 = c.$

   f) $(t + a)x' = bt - nx, a, b \in IR, n \neq 0, -1.$

   R. $x(t) = \frac{ab}{n} + \frac{b}{1-n}(t + a) + c(t + a)^n.$

   g) $y' + 4y = x^2 + 3x.$

   R. $y(x) = ce^{-4x} + \frac{x^2}{4} + \frac{5}{8}x - \frac{5}{32}.$

   h) $tdx + (x + tx - 1)dt = 0.$

   R. $x(t) = t^{-1}(1 + ce^{-t}).$

   i) $(2t - 2x) + (x - 1)\frac{dx}{dt} = 0.$

   j) $y' = sen(t)\cos(t) - ycos(t).$

R. $y(t) = sen(t) - 1 + ce^{-sen(t)}, c \in \mathbb{R}$.

k) $dt - \left(\frac{1+sen(t)}{cos^2(t) - xcos(t)}\right) dx = 0$.

R. $2(1 + sen(t))x = t + sen(t)\cos(t) + c$.

l) $cos^2(t)sen(t)dx + (xcos^3(t) - 1)dt = 0$.

R. $x(t) = \sec(t) + kcsc(t), 0 < t < \frac{\pi}{2}$.

m) $xy' = -4y + x^3 - x$.

R. $y(x) = \frac{x^3}{7} - \frac{x}{5} + \frac{c}{x^4}$.

n) $\frac{dy}{dx} + 2xy - 2xe^{-x^2} = 0$.

R. $ye^{x^2} - x^2 = c$.

o) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x - 2$.

R. $y(x) = x^2 - 2xLn|x| + cx$.

p) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{tcosx + senx}$.

R. $t = ce^{senx} - 2senx - 2$.

q) $xln(x)dt + (t - \ln(x))dx = 0$.

R. $ln^2(x) - 2tln(x) + 2c = 0$.

r) $y' = xy - x$.

R. $y(x) = 1 + ce^{\frac{x^2}{2}}$.

s) $\frac{dy}{dx} - y = x - 2$

R. $y(x) = 1 - x + ce^x$.

t) $x' = tx + t$

R. $x(t) = ce^{\frac{t^2}{2}} - 1$

u) $y' = ytan(x) + \cos(x)$

R. $ycos(x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen(2x) = c$.

3.3 EL PROBLEMA DE CAUCHY

Imponemos para la ecuación (α), una condición inicial del tipo $y(x_0) = y_0$, donde $x_0 \in I$ con y_0 un valor arbitrario. Tenemos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x), \ x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \qquad (\alpha_2)$$

que suele recibir el nombre de *problema de Cauchy*.

Teorema 3.2. Dado el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x), \ x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \qquad (\alpha_2)$$

Existe una única solución dada por

$$y(x) = e^{-\omega(x)}\left[e^{\omega(x_0)}y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(s)e^{\omega(x)}ds\right]$$

que es de clase C^1 en el intervalo I, y siendo $\omega(x) = \int p(x)dx$.

Demostración. Si $\omega(x) = \int p(x)dx$ consideremos

$$u(x) = e^{\omega(x)},$$

y tomemos ahora la primitiva de $Q(x)e^{\omega(x)}$ que vale 0 en x_0, o sea,

$$\int_{x_0}^{x_0} Q(s)e^{\omega(s)}ds = 0.$$

Así, la fórmula de la solución general (α_2) queda

$$y(x) = e^{-\omega(x)}\left[c + \int_{x_0}^{x} Q(s)e^{\omega(s)}ds\right].$$

El valor de esta solución en x_0 es $e^{-\omega(x_0)}c = y(x_0)$, luego existe sólo una de estas soluciones que cumple la condición inicial, y es la que se obtiene para

$$c = e^{\omega(x_0)}y(x_0).$$

Por tanto

$$y(x) = e^{-\omega(x)}\left[e^{\omega(x_0)}y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(s)e^{\omega(s)}ds\right].\blacksquare$$

Ejemplo 9. Resuelve el problema de valor inicial $y' = -2xy + x, \ y(0) = 1$.

Solución. En este caso la ecuación lineal se escribe,

$$y' + (2x)y = x \qquad (1)$$

tiene un factor integrante

$$\mu(x) = \exp(\int exdx) = e^{x^2},$$

multiplicando en la ecuación (1) por el factor integrante $\mu(x) = e^{x^2}$,

$$y'e^{x^2} + (2x)e^{x^2}y = xe^{x^2}$$

es decir,

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{x^2}\right) = xe^{x^2},$$

integrando se obtiene

$$ye^{x^2} = \int xe^{x^2}dx + c,$$

la solución general

$$ye^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + c,$$

la condición inicial $y(0) = 1$, da $c = \frac{1}{2}$. Su solución es entonces

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-x^2}\right). \blacksquare$$

Ejemplo 10. Resuelve la ecuación $y' + ycosx = sen.cosx$, que verifica la condición $y(0) = 0$.

Solución. Con el factor integrante $u(x) = \exp(\int cosxdx) = e^{senx}$ se tiene

$$\frac{d}{dx}(e^{senx}y) = e^{senx}senx.cosx,$$

$$e^{senx}y = \int e^{senx}senx.cosxdx + c,$$

la solución general

$$y(x) = senx - 1 + ce^{-senx},$$

la condición inicial $y(0) = 0$, da $c = 1$. Por tanto, la solución es

$$y(x) = senx - 1 + e^{-senx}. \blacksquare$$

PROBLEMAS 3.2

1. Se define la función $f(t)$ como

   $f(t) = \begin{cases} 5, & si\ 0 \le t < 10 \\ 0, & si\ \ t \ge 10 \end{cases}.$

   Resuelve el problema de valor inicial $x' = -x + f(t); x(0) = -1$.

2. Se define la función $x(t)$ como

   $x(t) = \begin{cases} 2, & si\ 0 \le t < 1 \\ 0, & si\ \ t \ge 1 \end{cases}.$

   Resuelve el problema de valor inicial $\frac{dx}{dt} = -x + x(t); x(0) = 0$.

   R. $x(t) = \begin{cases} 2(1 - e^{-t}), & si\ 0 \le t < 1 \\ 2(e - 1)e^{-t}, & si\ \ t \ge 1 \end{cases}.$

3. Obtener la solución particular de la ecuación diferencial $y' = -\frac{2}{x}y + \frac{\cos(x)}{x^2}$ que cumpa la condición $y(\pi) = 0$.

4. Se define la función $f(t)$ como

   $f(t) = \begin{cases} 5, & si\ 0 \le t < 10 \\ 0, & si\ \ t \ge 10 \end{cases}.$

   Resuelva el problema de valor inicial $x' = -x + f(t); x(0) = -1$.

   R. $x(t) = \begin{cases} 5 - 6e^{-t}, & 0 \le t < 10 \\ (5e^{10} - 6)e^{-t}, & t \ge 10 \end{cases}.$

5. Resolver la ecuación diferencial sujeta a la condición inicial dado.

   a) $\frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x}y = e^{-2x}; y(0) = 1$.

      R. $y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-2x}$.

   b) $y' + \frac{2xy}{3+x^2} = e^x$.

      R. $y(x) = \frac{(x^2-2x+5)e^x - 5}{x^2+3}$.

c) $\frac{dx}{du} + (cotu)x = 4senu, x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
R. $x = 2ucscu - 2cosu + \pi cscu$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+x^2}y + x\ , y(0) = 2.$
R. $y(x) = \sqrt{1+x^2} + 1 + x^2.$

e) $\frac{dx}{dt} - x = t, \quad x(0) = 1.$
R. $x(t) = -1 - t + 2e^t\ .$

3.4 CAMBIO DE VARIABLE

En algunos casos, es posible llevar esta ecuación de los pocos tipos de ecuaciones que sabemos para resolver por cuadraturas, y uno de los sistemas que permiten realizar esta transformación de la ecuación es el cambio de variable.

Se trata de resolver la ecuación de primer orden

$$y' = f(x, y)\ . \qquad (\beta)$$

a) Cambio de la forma $y = g(x, u)$. Consiste en buscar una ecuación que cumpla las funciones $u(x)$ asociada con las soluciones de la ecuación en y, x por

$$y(x) = g(x, u(x)).$$

La ecuación en u, x se obtiene sustituyendo y con sus derivadas

$$y = g(x, u),$$
$$y' = \frac{\partial g(x,u)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,u)}{\partial u}u',$$

de esta forma, la ecuación (β) se transforma en

$$\frac{\partial g(x,u)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,u)}{\partial u}u' = f(x, g(x, u)),$$

que es también una ecuación de primer orden. Si $G(u, x, c) = 0$ es la familia de las soluciones de la ecuación en u, x, entonces

$$G(u, x, c) = 0, \quad y = g(x, u)$$

es la familia de soluciones de la ecuación en y, x de (β). ■

Este es caso de la ecuación de Riccati, que veremos más adelante. En ocasiones el cambio es simplemente $y = g(u)$; entonces las sustituciones son

$$y = g(u),$$
$$y' = g'(u).u',$$

lo que resulta en este caso de la ecuación (β) es la ecuación de primer orden

$$g'(u)u' = f(x, g(u)).$$

Si $G(u, x, c) = 0$ es la solución de la ecuación en u, x, la solución de la ecuación en y, x es

$$G(u^{-1}(y), x, c) = 0. \blacksquare$$

b) Cuando el cambio se presenta en la forma $u = g(x, y)$, lo más sencillo es despejar la variable y, luego utilizar los procedimientos anteriores

$$u = g(x, y), \;\; u' = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} y',$$

por ejemplo, para el cambio $u = g(y)$ lo que resulta es

$$u = g(y), \;\; u' = g'(y).y' = g'\big(u^{-1}(y)\big)y'.$$

La ecuación (β) queda transformada en la ecuación de primer orden

$$u' = g'\big(g^{-1}(u)\big)g(x, g^{-1}(u)).$$

Si $G(u, x, c) = 0$ es la solución de la ecuación en u, x, la solución de la ecuación en y, x es $G(g(y), x, c) = 0$. Es el caso de ecuación de Bernoulli, que veremos más adelante.

c) Señalamos un cambio de función incógnita un poco diferente, que se emplea para rebajar el orden de una ecuación cuando la función incógnita y, no aparece explícitamente.

Se trata del cambio $u = y'$, que lleva a las sustituciones $y' = u$, $y'' = u'$, $y''' = u''$, etc. La ecuación en u, x que resulta no es más que la condición que debe cumplir la función $u(x)$ para que cualquiera de sus primitivas $\int u(x)dx$ sea solución de la ecuación en y, x original.

Por ejemplo, la ecuación de segundo orden $y'' = f(x, y')$ se transforma mediante dicho cambio en la ecuación de primer orden $u' = f(x, u)$. Si $u(x) = G(x, c)$ es la solución explícita en u, x, entonces $y(x) = k + \int G(x, c)dx$ es la familia de soluciones de la ecuación de segundo orden.

Ejemplo 11. Resuelve la ecuación

$$2xy'' - 3y' = 0.$$

Solución. Vemos que la ecuación no contiene la función incógnita y. Con el cambio $u = y'$ se transforma en

$$2xu' - 3u = 0,$$

ecuación lineal con solución

$$u(x) = cx^{3/2}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación original será

$$y(x) = \int cx^{3/2}dx + k = k + \tfrac{2}{5}cx^{5/2}. \blacksquare$$

d) **Cambio de variable independiente**. Consideremos ahora un cambio de la forma $v = g(x)$, o sea, un cambio en la variable independiente. Sí $y(x)$ es la función incógnita, denotamos por $u(v)$ la familia compuesta por

$$u(v) = y(g^{-1}(v)),$$

es decir, la función u tal que $y(x) = u(g(x))$.

El cambio consiste en buscar la ecuación que deba cumplir la función $u(v)$ para que $y(x) = u(g(x))$ sea solución de la ecuación original. La ecuación se obtiene sustituyendo en la original las derivadas de y obtenidas por la aplicación de la regla de la cadena

$$y(x) = u(v),\;\; y'(x) = u'(v)g'(x) = u'(v)g'(g^{-1}(v)),$$

por ejemplo, la ecuación (β) queda transformada en la ecuación de primer orden

$$u'g'(g^{-1}(v)) = f(g^{-1}(v), u).$$

Si $G(u, v, c) = 0$ es la solución de la ecuación en u, v, entonces la solución de la ecuación en y, x es

$$G(y, g(x), c) = 0.$$

e) Si el cambio de variables independiente se presenta en la forma $x = g(v)$, aquí denotamos por $u(v)$ la función compuesta $u(v) = y(g(v))$, lo que se desea es buscar la ecuación que debe verificar $u(v)$ cuando $y(x)$ es solución de la ecuación original en y, x. La ecuación se obtiene sustituyendo y, con sus demás derivadas sucesivas por las expresiones que se obtiene al despejar de las fórmulas

$$u(v) = y(x),\;\; u'(v) = y'(g(v)g'(v).$$

Por ejemplo, la ecuación (β), queda transformada en la solución de la ecuación en y, x es

$$G(y, g^{-1}(x), c) = 0.$$

Ejemplo 12. Dada la ecuación (de Euler)

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Solución. Se puede transformar para $x > 0$, mediante el cambio de variable independiente

$$x = e^v \;\text{ es decir } v = lnx,$$

como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}.\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dv}.\frac{1}{x}, \;\; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2}.\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dv}.\frac{1}{x^2},$$

la ecuación que resulta es, llamando ahora y', y'' derivadas respecto a v, es decir

$$\frac{dy}{dv} = x\frac{dy}{dx}, \;\; \frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv} = x^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

que reemplazando en la ecuación resulta

$$\frac{d^2y}{dv^2} + \frac{dy}{dv} - 2y = 0. \blacksquare$$

Este resultado trata de una ecuación lineal de segundo orden y de coeficientes constantes, que aprenderemos a resolver más adelante.

f) Posee también importancia un cambio a la vez de variable dependiente e independiente que sirve para rebajar el orden de una ecuación cuando no aparece explícitamente la variable independiente, en particular para ecuaciones de segundo orden. Si se tiene una ecuación de segundo orden

$$F(y, y', y'') = 0,$$

en la que no aparece explícitamente la variable independiente, x, entonces, si $y(x)$ es una solución y $x(y)$ su inversa , llamamos $u(y)$ a la función $u(y) = y'(x(y))$. Cuando buscamos las funciones $u(y)$ lo que hacemos es buscar funciones tales que las soluciones de

$$\frac{dy}{dx} = u(y)$$

sean soluciones de la ecuación. Explicamos ahora la utilidad del cambio. Escribimos la ecuación primitiva para todo $x(y)$; entonces

$$y''(x) = \frac{d}{dx} y'\big(x(y)\big) = \frac{y'(x(y))}{dy} . \frac{dy(x(y))}{dx} = \frac{du(y)}{dy} . u(y)$$

es decir

$$y'' = \frac{du}{dy} . u,$$

luego la ecuación en u, y es ahora

$$F\left(y, u, \frac{du}{dy} . u\right) = 0.$$

Cuando se termina de resolver esta ecuación de primer orden, luego queda por resolver

$$\frac{dy}{dx} = u(y),$$

lo cual nos la solución final de la ecuación de segundo orden.

Ejemplo 13. Resuelva la ecuación

$$2yy'' = (y')^2 - 2y'.$$

Solución. El cambio $u = y'$ lleva a

$$2y\frac{du}{dy} . u = u^2 - 2u$$

o sea, a la ecuación de primer orden y variable separada, cuya solución es

$$u(y) = 2 + cy^2.$$

La otra ecuación de primer orden resulta ahora

$$\frac{dy}{dx} = u(y) = 2 + cy^2,$$

ecuación también de variables separables y solución

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{c}} arctan\left(\sqrt{\frac{c}{2}}y\right) = x + k. \blacksquare$$

g) **La transformación en $x(y)$**. En ocasiones, alguna ecuación puede tener un aspecto más favorable para búsqueda de soluciones cuando la escribimos para $x(y)$, es decir, cuando buscamos inversas de las soluciones de a ecuación original. Para realizar el cambio de ecuación basta tener en cuenta la relación entre la derivada de una función y la de su inversa,

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y(x))}.$$

Por ejemplo, la ecuación en (β) se transforma en la ecuación en $x(y)$

$$x' = \frac{1}{f(x,y)},$$

su solución en la forma implícita $F(x, y, c)$, sirve también como solución de la ecuación en $y(x)$.

Ejemplo 14. Resuelve la ecuación

$$(x - 2y)y' = (x + 2y).$$

Solución. Haciendo el cambio $y = ux$ se transforma la ecuación homogénea en una ecuación de variable separable

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+2u}{1-2u}, \quad x\frac{du}{dx} = \frac{2u^2+u+1}{1-2u},$$

y tiene como solución a

$$\frac{3}{\sqrt{7}} arctan\left(\frac{x+4y}{\sqrt{7}x}\right) - \frac{1}{2} ln|x^2 + xy + 2y^2| = c. \blacksquare$$

Ejemplo 15. Resuelve la ecuación

$$(x(xy - 2))y' = y(3xy + 2).$$

Solución. En general el cambio $u = xy$ transforma la ecuación homogénea $y' = \frac{yf(xy)}{xg(xy)}$ en una ecuación de variable separable. La ecuación

$$y' = \frac{y(3xy+2)}{x(xy-2)}$$

tiene esa forma, entonces haciendo $u = xy$ la ecuación se transforma en

$$\frac{1}{x}\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) = \frac{u(3u+2)}{x^2(u-2)},$$

y separando variables

$$\left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^2}\right) du = \frac{4}{x} dx,$$

integrando se obtiene la solución

$$ln|u| + \frac{2}{u} = 4ln|x| + c$$

deshaciendo el cambio la solución general queda

$$ln|xy| + \frac{2}{xy} = 4ln|x| + c \text{ o bien } y = cx^3 e^{-\frac{2}{xy}}. \blacksquare$$

Ejemplo 16. Demuestre que la ecuación

$$y' + a(x)y = 2b(x)yLny$$

con $a(x), b(x)$ funciones reales, se transforma en una ecuación lineal al hacer $v = Ln(y)$.

Demostración. De $v = Ln(y)$ se tiene

$$v' = \frac{y'}{y} \text{ con } y = e^v,$$

entonces $y' = e^v v'$, reemplazando en la ecuación, se obtiene,

$$e^v v' + a(x)e^v = 2b(x)e^v v.$$

Por tanto, se tiene la ecuación lineal

$$v' - 2b(x)v = -a(x). \blacksquare$$

PROBLEMAS 3.3

1. Realice un cambio apropiado para resolver cada de uno las ecuaciones diferenciales:
   a) $y(y')^2 + (x - y)y' = x$.
   b) $\ln(x) = \ln(y') + 2y'$.
      R. $x = me^{2m}, y = \left(m^2 - \frac{m}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2m} + c$.
   c) $y'' = 1 + (y')^2$.
      R. $y = -log[\cos(x + c_1)] + c_2$.
   d) $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$.
      R. $y = \frac{-1}{2}x^2 - c_1x - c_1^2 \log(x - c_1) + c_2$.
   e) $y'' - k^2y = 0$.
      R. $y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}$.
   f) $(y')^2 - y^2(e^x - 1) = 2yy'$
   g) $xy'' = y' + (y')^2$
      R. $x^2 + (y - c_2)^2 = c_1^2$.
   h) $x^2(y')^2 + 3xyy' = -2y^2$
   i) $yy'' + (y')^2 = 0$
      R. $y^2 = c_1x + c_2$.
   j) $(y')^2 - (y^2 + 4)y' + (y^2 + 4) = 0$.
      R. $y - \sqrt{1 + y^2} = x + c$.
   k) $(x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0, y = 1,\ y' = 0$ cuando $x = 0$.

R. $y = 1, 3y + x^3 = 3$.

l) $(y + y')^3 = (y - y')^2$.

R. $x = ln\left(\frac{t^2}{|1-t|^5}\right) + c, y = \frac{1}{2}(t^2 + t^3)$.

3.5 ECUACIÓN NO LINEAL DE BERNOULLI

Existen algunas ecuaciones no lineales, que se reducen a una ecuación lineal mediante la aplicación de una transformación apropiada.

Definición 3.2. Una ecuación no lineal de la forma,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (\beta_1)$$

se denomina ecuación de *Bernoulli* con $n \in \mathbb{R}$.

Vemos que en (β_1), si $n = 0, n = 1$ la ecuación de Bernoulli es lineal. Por cierto Leibniz demostró que la transformación $v = y^{1-n}$ reduce la ecuación (β_1) a una ecuación lineal.

Teorema 3.3. Supongamos que en la ecuación (β_1) $n \neq 0, 1$. Entonces la transformación $v = y^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli (β_1) a una ecuación lineal en v.

Demostración. Multiplicando en (β_1) por y^{-n}, se tiene

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)\,, \qquad (\beta_2)$$

si $v = y^{1-n}$

entonces

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}, \qquad (\beta_3)$$

sustituyendo (β_3) en (β_2) se obtiene,

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x) \text{ que es lineal en } v. \blacksquare$$

Ejemplo 17. Resuelve la ecuación

$$y' = xy - xy^2.$$

Solución. Escribiendo como

$$\frac{dy}{dx} - xy = -xy^2,$$

adopta la forma de la ecuación de Bernoulli con $n = 2$. Hacemos $v = y^{1-2} = y^{-1}$, entonces $\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$ que sustituyendo en la ecuación resulta

$$\frac{dv}{dx} + xv = x, \qquad (*)$$

es una ecuación lineal en v. Tiene como factor integrante a $\mu(x) = exp(\int xdx) = e^{\frac{x^2}{2}}$, multiplicando en la ecuación (*) se obtiene,

$$e^{\frac{x^2}{2}}\frac{dv}{dx} + xe^{\frac{x^2}{2}}v = xe^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(ve^{\frac{x^2}{2}}\right) = xe^{\frac{x^2}{2}},$$

integrando resulta,

$$ve^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}} + c \text{ de donde } v(x) = 1 + ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

Finalmente deshaciendo el cambio $v = y^{-1}$ da como solución

$$y(x) = \left(1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{-1}. \blacksquare$$

Ejemplo 18. Encuentre la solución general de la ecuación

$$y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3y^3.$$

Solución. Haciendo el cambio

$$v = y^{-2}$$

se convierte en la ecuación lineal

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = (x+1)^2,$$

un factor integrante

$$u(x) = exp\left(\int -\frac{2}{x+1}dx\right) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

que aplica en la solución

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x+1)^2}v\right) = x + 1,$$

con solución $v(x) = (x+1)^2\left[\frac{x^2}{2} + x + c\right]$ con $v = y^{-2}$ se transforma finalmente en

$$y^{-2} = (x+1)^2\left[\frac{x^2}{2} + x + c\right]. \blacksquare$$

Ejemplo 19. Halle la solución general de la ecuación $y^2dx + (xy + x^3)dy = 0$.
Solución. Escribiendo en forma de derivadas con x como variable dependiente,

$$\frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{y}\right)x = \left(\frac{-1}{y^2}\right)x^3, \qquad (e_1)$$

haciendo $z = x^{-2}$ de donde $\frac{dz}{dy} = -2x^{-3}\frac{dx}{dy}$, multiplicando toda la ecuación (e_1) por la expresión $-2x^{-3}$, queda una ecuación lineal

$$-2x^{-3}\frac{dx}{dy} + \left(\frac{-2}{y}\right)x^{-2} = \frac{2}{y^2}$$

$$\frac{dz}{dy} + \left(\frac{-2}{y}\right) z = \frac{2}{y^2}. \qquad (e_2)$$

Un factor integrante de la ecuación lineal (e_2) es $\mu(y) = exp\left(\int \frac{-2}{y} dy\right) = y^{-2}$, aplicamos este factor integrante a toda la ecuación lineal,

$$y^{-2}\frac{dz}{dy} + (-2y^{-3})z = 2y^{-4},$$

de donde se obtiene $\frac{d}{dy}(y^{-2}z) = 2y^{-4}$, integrando es $z(y) = y^2\left(-\frac{2}{3}y^{-3} + c\right)$, y por lo tanto, deshaciendo el cambio $z = x^{-2}$ se obtiene la familia de curvas

$$x = \left(cy^2 - \frac{2}{3y}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

donde c es una constante arbitraria.■

Ejemplo 20. Resuelve el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3, \ y(0) = 1.$$

Solución. La ecuación es tipo Bernoulli con $n = 3$, y se escribe,

$$-2y^{-3}\frac{dy}{dx} - 2y^{-2} = -2x \qquad (1)$$

haciendo $v = y^{1-3} = y^{-2}$,

entonces

$$\frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}, \qquad (2)$$

llevando (2) en (1) se obtiene

$$\frac{dv}{dx} - 2v = -2x, \qquad (3)$$

el factor integrante es $\mu(x) = exp(\int -2dx) = e^{-2x}$,

multiplicando en (3) resulta,

$$\frac{d}{dx}(e^{-2x}v) = -2xe^{-2x},$$

$$e^{-2x}v = -\int 2xe^{-2x}dx + c = \frac{1}{2}e^{-2x}(2x+1) + c,$$

es decir,

$$v = x + \frac{1}{2} + ce^{2x},$$

pero $v = y^{-2}$ entonces

$$\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + ce^{2x},$$

aplicando $y(0) = 1$, se tiene $1 = \frac{1}{2} + ce^0$ y $c = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto

$$\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x}.■$$

Observación. Consideremos la ecuación

$$\left[\frac{d}{dy}f(y)\right].\frac{dy}{dx}+P(x)f(y)=Q(x) \qquad (\alpha)$$

donde f es una función conocida de y, haciendo $v=f(y)$ tenemos,

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dy}.\frac{dy}{dx}=\left[\frac{d}{dy}(f(y))\right]\frac{dy}{dx}$$

de manera que (α) se transforma en

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=Q(x),$$

que es lineal en v. Podemos señalar que la ecuación de Bernoulli es un caso especial de la ecuación (α), pues basta ver,

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+P_1(x)y^{1-n}=Q_1(x),$$

donde $P_1(x)=(1-n)P(x),\ Q_2(x)=(1-n)Q(x),\ f(y)=y^{1-n},\ v=f(y)$.

Ejemplo 21. Resuelve el problema de valor inicial

$$y^2dx+(3xy-1)dy=0,\ y\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

Solución. Escribiendo esta ecuación asumiendo que la variable dependiente sea x, la ecuación es lineal,

$$\frac{dx}{dy}+\left(\frac{3}{y}\right)x=y^{-2}$$

cuyo factor integrante es

$$u(y)=exp\left(\int\frac{3}{y}dy\right)=y^3,$$

de donde,

$$y^3\frac{dx}{dy}+\left(\frac{3}{y}\right)y^3x=y^{-2}y^3,\ \ \frac{d}{dy}(y^3x)=y$$

integrando,

$$y^3x=\int ydy+c\,,$$

la solución general es

$$y^3x=\frac{1}{2}y^2+c.$$

Para $y\left(\frac{1}{2}\right)=1$ resulta $c=0$, por tanto

$$x=\frac{1}{2y}.\blacksquare$$

Ejemplo 22. Resuelve el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx}=xy-xy^3,y(0)=1.$$

Solución. La ecuación es no lineal de Bernoulli y se escribe,

$$\frac{dy}{dx}-xy=-xy^3\,, \qquad (1)$$

Haciendo

$$u = y^{1-3} = y^{-2},\ \frac{du}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}, \qquad (2)$$

multiplicando (1) por $-2y^{-3}$ se obtiene $-2y^{-3}\frac{dy}{dx} + (2x)y^{-2} = 2x$ que se reduce a una ecuación lineal,

$$\frac{du}{dx} + (2x)u = 2x,$$

un factor integrante es

$$u(x) = exp(\int 2xdx) = e^{x^2},$$

con este factor integrante la ecuación lineal se escribe,

$$e^{x^2}\frac{du}{dx} + (2x)e^{x^2}u = 2xe^{x^2}$$

es decir

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}u\right) = 2xe^{x^2},$$

entonces $y^{-2} = 1 + ce^{-x^2}$, ahora con $y(0) = 1$, se tiene $c = 0$. Por lo tanto, la solución es $y^2 - 1 = 0$.■

Ejemplo 23. Resuelve el problema de valor inicial

$$tx(1 + tx^2)\frac{dx}{dt} = 1,\ x(1) = 0.$$

Solución. La ecuación es no lineal de Bernoulli cuando se escribe de manera apropiada,

$$\frac{dt}{dx} + (-x)t = x^3t^2\,, \qquad (1)$$

haciendo

$$v = t^{1-2} = t^{-1}, \frac{dv}{dx} = -t^{-2}\frac{dt}{dx},$$

multiplicando en (1) por $-t^{-2}$ se obtiene,

$$-t^{-2}\frac{dt}{dx} + xt^{-1} = -x^3$$

es decir

$$\frac{dv}{dx} + xv = -x^3$$

es lineal con factor de integración la función

$$u(x) = exp(\int xdx) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

multiplicando en la ecuación lineal se tiene,

$$e^{\frac{x^2}{2}}\frac{dv}{dx} + xe^{\frac{x^2}{2}}v = -x^3e^{\frac{x^2}{2}}$$

Entonces

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{2}}v\right) = -x^3e^{\frac{x^2}{2}},$$

integramos en ambos miembros,

$$e^{\frac{x^2}{2}}v = \int\left(-x^3 e^{\frac{x^2}{2}}\right)dx + c,$$

por tanto la solución en v es,

$$v(x) = -x^2 + 2 + ce^{\frac{-x^2}{2}},$$

pero como $v = t^{-1}$ entonces,

$$t^{-1} = -x^2 + 2 + ce^{\frac{-x^2}{2}}$$

como $x(0) = 0$, se tiene $c = -1$, finalmente

$$t^{-1} = 2 - x^2 - e^{\frac{-x^2}{2}}.\blacksquare$$

Ejemplo 24. Halle la solución general de

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{x}{y^3}.$$

Solución. La ecuación es del tipo Bernoulli. El cambio

$$v = y^4$$

la convertirá en lineal de la forma

$$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{4}{x}\right)v = 4x$$

usando el factor integrante

$$u(x) = \exp(\int \frac{4}{x}dx) = x^4$$

se obtiene la solución

$$x^4 v = \frac{2}{3}x^6 + c,$$

pero como $v = y^4$ se transforma en

$$x^4 y^4 = \frac{2}{3}x^6 + c. \blacksquare$$

Ejemplo 25. Encuentre la solución general de

$$x^2 y' + x^3 y = y^2(1 + x^2).$$

Solución. Es una ecuación no lineal de Bernoulli con $n = 2$, pues

$$y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)y^2.$$

El cambio $v = \frac{1}{y}$

lo convierte en la ecuación lineal

$$v' - xv = -1 - \frac{1}{x^2}$$

mediante el factor integrante $u(x) = exp(\int -xdx) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

se tiene

$$e^{-\frac{x^2}{2}}v=\int\left(-1-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}dx+c=\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}+c$$

de donde la solución en v es

$$v = ce^{\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{x}$$

como $v = y^{-1}$ la solución se transforma

$$y(x) = \frac{x}{cxe^{\frac{x^2}{2}}+1}. \blacksquare$$

Ejemplo 26. Resuelve la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2.$$

Solución. Es una ecuación no lineal de Bernoulli con $n = 2$, pues

$$y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = xy^2.$$

El cambio $v = \frac{1}{y}$

lo convierte en la ecuación lineal

$$v' - \left(\frac{1}{x}\right)v = -x$$

mediante el factor integrante

$$u(x) = exp\left(\int\left(\frac{-1}{x}\right)dx\right) = \frac{1}{x}$$

se tiene

$$\frac{1}{x}v = -\int dx + c = -x + c$$

de donde la solución en v es

$$v = -x^2 + cx$$

como $v = y^{-1}$ la solución se transforma

$$y(x) = (-x^2 + cx)^{-1} . \blacksquare$$

PROBLEMAS 3.4

1. Siendo $n \neq 0$, $n \neq 1$, resuelve la ecuación $x' = Q(t)x^n$, siendo $Q(t)$ una función continua en el intervalo $\langle a, b\rangle$.
2. Halle la solución general de las ecuaciones.
   a) $3xy' - 2y = x^3y^{-2}$.
   b) $y' - y = xy^2$.
   c) $\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = -\frac{x^2}{t}$.
   R. $x(t) = (1 + ct^{-1})^{-1}$.

d) $(4x - 8x^{-3})tdt = -dx$.

R. $x(t) = \left(2 + ce^{-8t^2}\right)^{1/4}$.

e) $t^2 \frac{dx}{dt} + 2tx + x^3 = 0$, con $x > 0$.

R. $x(t) = \left(-\frac{2}{5}t^{-1} + ct^4\right)^{-1/2}$

f) $\left(\frac{1+x^2}{2}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}(y^4 - y)$.

R. $y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+c(1+x^2)}}$.

g) $y^2dx + (xy - x^3)dy = 0$.

h) $tx' = -3 + 4te^{-x}$, sug. Hacer $u = e^{-x}$.

i) $t\frac{dx}{dt} = 2x + 2t^4$

j) $xy' = -y + y^2\ln(x)$.

k) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y^2}$.

R. $y^3 = cx^{3/2} - 3x^2$.

l) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{tx+t^5}$.

m) $e^{-2t}(x' + x) = x^2$.

R. $x(t) = (ce^t - e^{2t})^{-1}$.

n) $4(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy^5 - 2xy$.

o) $y' = y + y^2$

R. $y(x) = \frac{1}{ce^{-x}-1}$.

p) $t\frac{dx}{dt} + x = -3t^6x^4$.

R. $x^{-3} = 3t^6 + ct^3$.

q) $xy' = y + 2xy^2$.

R. $y(x) = \frac{x}{c-x^2}$.

r) $xy'' - 3y' = 4x^2$, sug. hacer $v = y'$.

s) $\frac{dy}{dx} = (xy^3 - 1)y$.

R. $y(x) = \left(x + \frac{1}{2} + ce^{2x}\right)^{-1/2}$.

t) $x^3y' = 2x^2y + y^3$.

R. $x^4 = y^2(c - x^2)$.

3. Resuelve el problema de valor inicial.

a) $t\frac{dx}{dt} + x = (tx)^{3/2}, x(1) = 2$.

R. $x^{-1/2} = -\frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)t^{1/2}$.

b) $\frac{x}{t} - \frac{t}{x^2} = 2\frac{dx}{dt}$, $x(1) = 1$.

c) $t\frac{dx}{dt} = 2x + 2t^4$, $x(2) = 8$.

R. $x(t) = t^4 - 2t^2$.

d) $[x - 3(e^t + 1)^2]dt + \left(\frac{e^t+1}{e^t}\right)dx = 0$, $x(0) = 4$.

R. $x(t) = (e^t + 1)^2$.

e) $x^2\frac{dy}{dx} = 2xy + 3y^4$, $x(1) = \frac{1}{2}$.

f) $x^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{dt} + 2x^{\frac{3}{2}} = 3$ con $x(0) = 1$.

R. $x(t) = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right)^{\frac{2}{3}}$.

g) $y' = -\frac{xy}{1+x^2} - xy^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

R. $y(x) = \frac{1}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$.

h) $\frac{dx}{dt} + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}tx^4$.

i) $x^2 = -(tx - t^3)x'$.

3.6 ECUACIÓN NO LINEAL DE RICCATI

Definición 3.3. A la ecuación no lineal de la forma

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \qquad (r)$$

se denomina ecuación diferencial de *Riccati*.

Cuando $A(x) \equiv 0, \forall x \in \langle a, b\rangle$ se trata de una ecuación lineal; cuando $C(x) \equiv 0$, se trata de una ecuación no lineal de Bernoulli. Supongamos conocida una solución $f_0(x)$, entonces el cambio de variable

$$y = f_0(x) + u$$

la transforma en una ecuación de Bernoulli con $n = 2$, de manera que el siguiente teorema nos da las pautas para transformar a una ecuación lineal.

Teorema 3.4. En la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x), \qquad (r)$$

si $f_0(x)$ es una solución cualquiera de esta ecuación, entonces la transformación

$$y = f_0(x) + \frac{1}{v}$$

reduce la ecuación (r) a una ecuación lineal en v.

Demostración. Tenemos la ecuación,

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \qquad (r)$$

Si $f_0(x)$ es una solución de la ED (r), entonces satisface la ecuación (r), es decir,

$$\frac{d}{dx}[f_0(x)] = A(x)[f_0(x)]^2 + B(x)f_0(x) + C(x) \qquad (r_1)$$

de la transformación $y = f_0(x) + \frac{1}{v}$ derivando respecto a x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f_0(x)] - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} \qquad (r_2)$$

y reemplazando (r_2) en (r_1) se obtiene

$$\frac{d}{dx}[f_0(x)] - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = A(x)\left(f_0(x) + \frac{1}{v}\right)^2 + B(x)\left[f_0(x) + \frac{1}{v}\right] + C(x),$$

$$\frac{d}{dx}[f_0(x)] - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = A(x)[f_0(x)]^2 + B(x)f_0(x) + C(x) + 2\frac{f_0(x)A(x)}{v} + \frac{A(x)}{v^2} + \frac{B(x)}{v},$$

se reduce a

$$\frac{dv}{dx} + [2A(x)f_0(x) + B(x)]v = -A(x)$$

que es una ecuación lineal en v.■

La ecuación de Riccati, cuando se conocen más soluciones, presentan propiedades que facilitan la búsqueda de otras soluciones.

Teorema 3.5. Sean f_1, f_2 dos soluciones de la ecuación de Riccati, entonces su solución general puede obtenerse mediante una sola cuadratura.

Demostración. Asumiendo que f_1, f_2 son dos soluciones particulares conocidas. Efectuando el cambio de función $y = \frac{f_1(x) - vf_2(x)}{1-v}$ se reduce a

$$v'(f_1(x) - f_2(x)) - A(x)v[f_1(x) - f_2(x)]^2 = 0$$

que es una ecuación de variables separables, es decir

$$\frac{dv}{v} = A(x)(f_1(x) - f_2(x))dx$$

y, mediante una cuadratura se obtiene

$$Lnv = \int A(x)\big(f_1(x) - f_2(x)\big)dx + k$$

de manera que se tiene

$$v = cexp\left\{\int A(x)\big(f_1(x) - f_2(x)\big)dx\right\},$$

y por lo tanto la solución general de la ecuación de Riccati es

$$y = \frac{f_1(x) - vf_2(x)}{1-v}. \blacksquare$$

Teorema 3.6. Sean f_1, f_2, f_3 tres soluciones particulares de la ecuación de Riccati, entonces la solución general se obtiene sin necesidad de ninguna cuadratura.

Demostración. Aplicando la transformación $y = f_3(x) + \frac{1}{v}$ se obtiene la ecuación lineal de primer orden,

$$v' + [B(x) + 2A(x)f_3(x)]v + A(x) = 0\,, \qquad (1)$$

las otras dos soluciones particulares nos proporcionan dos soluciones de esta ecuación lineal (1), esto es,

$$v_1 = [f_1(x) - f_3(x)]^{-1},\ v_2 = [f_2(x) - f_3(x)]^{-1}.$$

La ecuación lineal tiene como solución a

$$v = c(v_1 - v_2) + v_1$$

entonces $\frac{v-v_1}{v_1-v_2} = c$, es decir

$$\frac{y-f_1(x)}{y-f_3(x)} \cdot \frac{f_3(x)-f_2(x)}{f_2(x)-f_1(x)} = c. ■$$

Ejemplo 27. Halle una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación de Riccati

$$\frac{dy}{dx} - (1-x)y^2 = (2x-1)y - x,$$

dando como solución $f_0(x) = 1$.

Solución. Se verifica que $f_0(x) = 1$ es una solución de la ecuación, mediante la transformación

$$y = 1 + \frac{1}{v},$$

se obtiene

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} - (1-x)\left(1 + \frac{2}{v} + \frac{1}{v^2}\right) = (2x-1)\left(1 + \frac{1}{v}\right) - x$$

que se reduce a la ecuación lineal

$$\frac{dv}{dx} + v = x - 1,$$

por lo tanto, la solución general es

$$v = x - 2 + ce^{-x}.$$

Finalmente, la solución de la ecuación de Riccati se expresa por

$$y = 1 + \frac{1}{ce^{-x}+x-2}. ■$$

Ejemplo 28. Calcule la solución general de la ecuación de Riccati

$$y' = \frac{y}{x} + x^2y^2 - x^4,$$

siendo una solución particular $f_0(x) = x$.

Solución. Es obvio que $f_0(x) = x$ es una solución, por lo que el cambio

$$y = x + \frac{1}{v}$$

lo convertirá en lineal, es decir siendo $y' = 1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$ resulta

$$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{1}{x} + 2x^3\right)v = -x^2,$$

con el factor integrante

$$u(x) = exp\left(\int \frac{1}{x} + 2x^3\right)dx = xe^{\frac{x^4}{2}}$$

se obtiene la solución

$$xe^{\frac{x^4}{2}}v = -\int x^3 e^{\frac{x^4}{2}}\,dx + c,$$

$$v(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{c}{x}e^{\frac{-x^4}{2}},$$

finalmente, la solución general es

$$y(x) = x + \frac{x}{-\frac{1}{2}+ce^{\frac{-x^4}{2}}}. \blacksquare$$

Observación. Con este cambio, la $f_0(x)$ nunca puede quedar integrada en el resultado de la solución general para ningún valor de la constante c, puesto que no puede corresponder a ninguna solución de la ecuación en v, x. Pero claro, $f_0(x)$ aparece como límite de la solución general cuando $c \to \infty$.

Ejemplo 29. Encuentre la solución general de la ecuación de Riccati

$$y' = -y^2 senx + 2tanx.senx,$$

sabiendo que $f_0(x) = secx$ es una de sus soluciones.

Solución. Es obvio que $f_0(x) = secx$ es una solución, por lo que el cambio

$$y = secx + \frac{1}{v}$$

la convertirá en lineal. La ecuación que resulta es

$$\frac{dv}{dx} + (-2secx.senx)v = senx,$$

que tiene un factor integrante

$$u(x) = cos^2x\ ,$$

entonces la solución sale de

$$\frac{d}{dx}(vcos^2x) = senx.cos^2x$$

$$vcos^2x = \int senx.cos^2xdx + c,$$

la solución es

$$v(x) = -\frac{cosx}{3} + sec^2x,$$

y, deshaciendo el cambio, se obtiene finalmente

$$y(x) = secx + \frac{3}{3csec^2x - cosx}.\blacksquare$$

Ejemplo 30. Resuelve la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2,$$

donde $y_1(x) = \frac{2}{x}$ es una solución particular.

Solución. Es una ecuación no lineal de Riccati, para resolver hacemos un cambio de variable de la forma,

$$y = \frac{2}{x} + u,$$

donde

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2} + \frac{du}{dx}$$

que reemplazando en la ED se obtiene,

$$-\frac{2}{x^2} + \frac{du}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + u\right) + \left(\frac{2}{x} + u\right)^2,$$

se reduce a la ecuación de Bernoulli $\frac{du}{dx} + \left(\frac{-3}{x}\right)u = u^2$,

ahora haciendo $v = u^{-1}$ con

$$\frac{dv}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx},$$

esta ecuación se reduce a una ecuación lineal

$$\frac{dv}{dx} + \frac{3}{x}v = -1,$$

con el factor integrante $u(x) = exp\left(\int \frac{3}{x}dx\right) = x^3$,

$$v = -\frac{x}{4} + cx^{-3}, \text{ pero } v = u^{-1},$$

entonces $u^{-1} = -\frac{x}{4} + cx^{-3}$, es decir

$$u = \left(-\frac{x}{4} + cx^{-3}\right)^{-1}.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = \frac{2}{x} + \left(-\frac{x}{4} + cx^{-3}\right)^{-1}.■$$

Obsérvese que en este problema se usó dos transformaciones, lo cual no es necesario, se recomienda aplicar directamente $y = f_0(x) + \frac{1}{v}$.

Ejemplo 31. Encuentre la solución general de la ecuación

$$y' + y^2 = 1 + t^2,$$

siendo $y = t$ una de sus soluciones.

Solución. Es una ecuación de Riccati, mediante la transformación

$$y = t + \frac{1}{v} \text{ y } y' = 1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dt},$$

reemplazando en la ecuación se obtiene,

$$1 - -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dt} + \left(t + \frac{1}{v}\right)^2 = 1 + t^2$$

es decir la ecuación lineal en v

$$\frac{dv}{dt} - 2tv = 1,$$

mediante el factor integrante

$$u(t) = exp(\int -2t\, dt) = e^{-t^2}$$

se obtiene la solución

$$e^{-t^2}v = \int e^{-t^2}\, dt + c,$$

luego $v = e^{t^2}\left[\int e^{-t^2}\, dt + c\right]$

de manera que la solución general es

$$y(t) = t + \frac{1}{e^{t^2}\left[\int e^{-t^2} dt + c\right]}. \blacksquare$$

Ejemplo 32. Calcule la solución general de la ecuación de Riccati

$$y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$$

sabiendo que posee una solución que es un polinomio.

Solución. Se puede verificar que $f_0(x) = x^2$ es una solución por lo que el cambio

$$y = x^2 + \frac{1}{u}$$

lo convertirá en lineal

$$u' + \left(\frac{2}{x} - 2x\right)u = \frac{1}{x},$$

con factor integrante

$$u(x) = exp\left(\int \frac{2}{x} - 2x\right)dx = x^2e^{-x^2}$$

luego,

$$x^2e^{-x^2}u = \int \left(xe^{-x^2}\right)dx + c = \frac{-1}{2}e^{-x^2} + c$$

con solución

$$u = -\frac{1}{2}x^{-2} + cx^{-2}e^{x^2}$$

y, deshaciendo el cambio, se obtiene finalmente

$$y = x^2 + \frac{x^2}{ce^{x^2} - \frac{1}{2}}. \blacksquare$$

PROBLEMAS 3.5

1. Resuelve las ecuaciones diferenciales, utilizando la solución dada:
   a) $xy' + y = y^2\ln(x)$.
   b) $\frac{dx}{dt} = (1-t)x^2 + (2t-1)x - t, x_1(t) = 1$.
      R. $x(t) = 1 + (t - 2 + ce^{-t})^{-1}$.
   c) $\frac{dx}{dt} = -8tx^2 + 4t(4t+1)x - (8t^3 + 4t^2 - 1), x_1(t) = t$.

R. $x(t) = \left(2 + ce^{-2t^2}\right)^{-1} + t$.

d) $\frac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2, y_1(x) = 2x$.

R. $y(x) = 2x + e^x \left(c - \int_{x_0}^{x} e^{t^2} dt\right)^{-1}$.

e) $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2,\ y_1(x) = \frac{2}{x}$.

R. $y(x) = \frac{2}{x} + \left(cx^{-3} - \frac{x}{4}\right)^{-1}$.

2. Resuelve la ecuación $y' + xy - (2x^2 + 1)y + x^3 + x - 1 = 0$, sabiendo que tiene una solución particular $y_1(x) = x$.

   R. $y(x) = x + \frac{1}{ce^{-x} - x + 1}$.

3. Halle una solución de la ecuación diferencial $(x^2y^2 + 1)dx + 2x^2dy = 0$ que sea de la forma $y = \frac{b}{x}$.

   R. $y = \frac{1}{x}$.

4. Sea la ecuación $y' = y^2 - \frac{1}{x}y - \frac{1}{y^2}$, (a) determine una solución de la forma $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$; (b) Obtener la solución particular $y = y(x)$ que cumpla $y(1) = 2$.

   R. (a) $y(x) = x^{-1}$, (b) $y(x) = \frac{x^2+3}{x(3-x^2)}$.

5. Resolver la ecuación $y' = \frac{x - x^3}{4(1+x^2)} + \frac{x^3}{1+x^2}y - xy^2$ sujeta a la condición $y(0) = 1$, señale el intervalo de continuidad.

   R. $y_1(x) = \frac{1}{2}$; $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \langle -\infty, +\infty \rangle$.

3.7. ECUACIÓN NO LINEAL DE CLAIRAUT

Es una ecuación llamada así en honor a Clairaut*, quién fue el primero en estudiarla. Se resuelve mediante una sustitución simple, lo interesante es que esta ecuación tiene una familia de solución general y una solución singular que no pertenece a la familia de soluciones. Un especial interés la solución general es una familia de rectas (se puede generalizar) además se tiene la envolvente; es decir, es la curva cuya tangente están dadas por la familia, en este caso es una *solución singular* de la ecuación de Clairaut

*Alexis Claude Clairaut, Astrónomo y matemático francés (1713-1765). Entre otras, su campo de interés fueron las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones en derivadas parciales, la teoría de superficies, en 1734 se interesó por una ecuación que actualmente lleva su nombre.

Vamos a deducir como obtiene esta ecuación, tiene que ver con rectas tangentes. Consideremos una función real de variable real $g: D \subset IR \to IR$, si $(x_0, f(x_0)) \in D$, entonces la recta tangente a la curva en el punto es

$$y - g(x_0) = g'(x)(x - x_0)$$

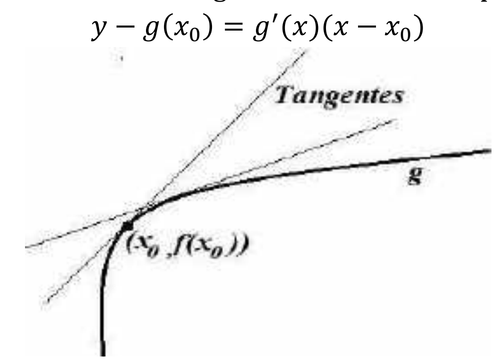


Figura 3.1: Concepto de derivada y recta tangente.

La ecuación representa a una familia de rectas tangentes con constantes $x_0 = c$, si $g'(x) = y$ se escribe

$$y - g(c) = y'(x - c),$$

entonces es posible encontrar una ecuación diferencial donde la solución general sea esta familia de curvas. Si $y' = g'(c)$ y $g'(x)$ tiene una inversa cerca de c, entonces $c = f(y')$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente se escribe

$$y = xy' + f(y').$$

Definición 3.4. Una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$ que puede escribirse en la forma

$$y = xy' + f(y') \qquad (1)$$

se denomina *ecuación de Clairaut*, donde $f(x)$ es una función continuamente derivable.

Teorema 3.7. La ecuación de Clairaut $y = xy' + f(y')$ donde $f(x)$ es una función derivable tiene como solución general $y = cx + f(c)$ y como solución singular a

$$x = -f'(p)$$
$$y = -pf'(p) + f(p).$$

Demostración. Hacemos la sustitución $y' = p$ y la ecuación dada se escribe $y = xp + f(p)$, derivando respecto a x

$$\frac{dy}{dx} = p + f'(p)\frac{dp}{dx} + x\frac{dp}{dx}$$

Como $y' = p$, entonces $p = p + f'(p)\frac{dp}{dx} + x\frac{dp}{dx}$ simplificando se obtiene

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Se tiene dos casos:

i) Suponer que $x + f'(p) \neq 0$, entonces $\frac{dp}{dx} = 0$, es decir $p = c$ es constante arbitraria. Sustituyendo en (1) se obtiene la solución general $y = cx + f(c)$.

ii) Si $x + f'(p) = 0$ podemos obtener una solución "extra" que no es miembro de la familia uniparamétrica de soluciones. Esta solución "extra" se llama, normalmente, *solución singular*,

$$x = -f'(p)$$
$$y = -pf'(p) + f(p),$$

que representa las ecuaciones paramétrica de una curva considerando a p como parámetro.

Ejemplo 33. Resuelve la ecuación

$$y = px + p^2, \text{donde } p \equiv \frac{dy}{dx}.$$

Solución. Vemos que es una ecuación de Clairaut, derivando respecto de x,

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

de donde, $(x + 2p)\frac{dp}{dx} = 0$, suponiendo que $x + 2p \neq 0$, se tiene $p = c$, luego la solución uniparamétrica es

$$y = cx + c^2. \blacksquare$$

Por otro lado si $x + 2p = 0$ buscamos una solución "extra", $p = -\frac{x}{2}$, es decir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2},$$

la ecuación $y = -\frac{x^2}{4}$ no es un miembro de la familia, es una *solución singular* es la envolvente donde precisamente las rectas $y = cx + c^2$ son tangentes a esta parábola. La gráfica 3.2 muestra algunas de estas curvas.

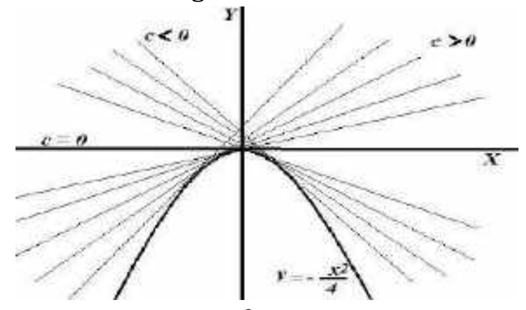


Figura 3.2: Envolvente $y = -\frac{x^2}{4}$ y las rectas tangentes $y = cx + c^2$.

Ejemplo 34. Resuelve la ecuación $y - xy' = \sqrt{1 + (y')^2}$.

Solución. Haciendo $y' = p$ se obtiene $y = xp + \sqrt{1 + p^2}$, luego derivando respecto a x se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx},$$

pero como $y' = p$ entonces $p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx}$ esto reduce a una ecuación

$$\left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Ocurren dos casos:

1) Si $\frac{dp}{dx} = 0$, entonces $p = c$, y la solución general sería

$$y = cx + \sqrt{1 + c^2}.$$

2) Si $x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$, entonces la solución singular es

$$x = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$y = \frac{-p^2}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1 + p^2} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}. \qquad (t_1)$$

Las ecuaciones (t_1) son soluciones paramétricas, aquí p representa al parámetro, y anulando el parámetro se obtiene un circulo de radio uno $x^2 + y^2 = 1$, en la figura 3.3 se muestra alguna de las rectas tangentes al círculo.

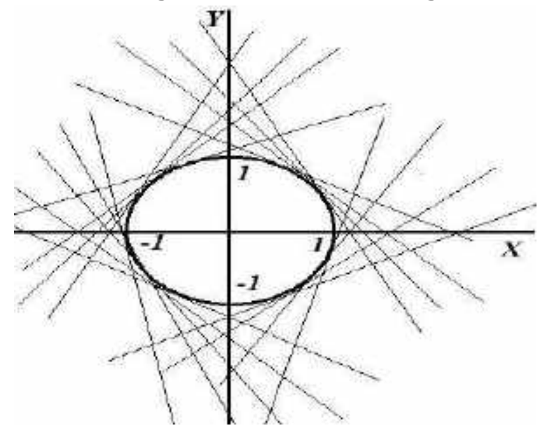


Figura 3.3: Rectas tangentes $y = cx \pm \sqrt{1 + c^2}$ y envolvente $x^2 + y^2 = 1$.

Ejemplo 35. Resuelve la ecuación $y - xy' = \frac{a}{2y'}$.

Solución. Haciendo $y' = p$ se obtiene $y = xp + \frac{a}{2p}$, luego derivando respecto a x se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{a}{2p^2}\frac{dp}{dx},$$

pero como $y' = p$ entonces $p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{a}{2p^2}\frac{dp}{dx}$ esto reduce a una ecuación

$$\left(x - \frac{a}{2p^2}\right)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Ocurren dos casos:

Si $\frac{dp}{dx} = 0$, entonces $p = c$, y la solución general sería

$$y = cx + \frac{a}{2c}.$$

Si $x - \frac{a}{2p^2} = 0$, entonces la solución singular es

$$x = \frac{a}{2p^2}$$

de donde la envolvente es $y^2 = 2ax$. ■

PROBLEMAS 3.6

Resuelve las ecuaciones diferenciales:

a) $y = xy' + (y')^2$.

b) $y = xy' + \frac{a}{2y'}$, a es constante real.

R. $y = cx + \frac{a}{2c}$, la envolvente $y^2 = 2ax$.

c) $y^4 - (y')^4 - y(y')^2 = 0$.

d) $y = 2xy' + sen(y')$.

e) $y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$.

R. $y = cx - c^3$.

f) $2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 x - 8x^2$

R. $2c^2x^2y = c^3x^4 - 8x^2$.

g) $y = xy' - 2(y')^2$.

R. $y = px - 2p^2, y = \frac{x^2}{8}$.

h) $y = 2xy' + \ln(y')$.

i) $y = y'x + \frac{b}{y}$.

R. $x = \frac{b}{p^2}, y = \frac{2b}{p}, y^2 = 4bx$.

d) $y = xp - \tan(p)$ donde $p = \frac{dy}{dx}$

e) $y - xp = \sqrt{1 + p^2}$, $p = \frac{dy}{dx}$

f) $xp - y = e^p,\ p = \frac{dy}{dx}$

g) $y - x\frac{dy}{dx} = 1 - ln\left(\frac{dy}{dx}\right)$

h) $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)\tan(x) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 sec^2(x)$, sugerencia: hacer $p = sen(x)$.

3.8 ECUACIÓN DE LAGRANGE

Las ecuaciones de Lagrange* y Clairaut son dos casos particulares de un tipo de ecuación no resueltas respecto a la derivada. Para tener una idea.
Ecuaciones resueltas a la derivada

$$y' = f(x,y) \qquad (1)$$

Ecuaciones no resueltas respecto a la derivada,

$$y = f(x,y'),\ x = (g(y,y')\ . \qquad (2)$$

Para las ecuaciones del tipo (1), hay variados métodos para resolverlo. En el tipo (2), llegamos a que no es posible despejar dicha derivada como en (1), entonces si se tendría que despejar alguna de las otras dos ya sea función de la variable dependiente o la variable independiente. Para encontrar el tipo de solución, tendremos como resultado de resolver cualquiera de los dos tipos de (2), se requiere resolver para una solución general $y = f(x,y')$, se escribe esta ecuación empleando un parámetro $p(x) = y'$, $\frac{dy}{dx} = y'$ y su diferencial $dy = p(x)dx$, así obtenemos la solución de la ecuación original en forma paramétrica,

$$x = \varphi(p,c), y = f(\varphi(p)). \qquad (3)$$

Definición 3.5. La ecuación diferencial de la forma

$$y = xf(y') + g(y'),$$

donde $f(y') \neq y'$, se denomina *ecuación diferencial de Lagrange*.

Nota: Las funciones f, g son funciones únicamente de la variable y'. La ecuación diferencial de *Clairaut* ($f(y') = y'$) si es un caso especial de la ecuación diferencial de *Lagrange*, donde f es la función identidad.

*Joseph Louis de Lagrange, Astrónomo y matemático francés, de origen italiano, tuvo aportes muy importantes, escribió una obra llamada *Miscellanea taurinensia*, resultados sobre una ecuación diferencial general del movimiento rectilíneo, y la solución a muchos problemas de dinámica, tratados de astronomía y sobre mecánica analítica.

Teorema 3.8. La ecuación de Lagrange $y = xf(y') + g(y')$ donde $f(y') \neq y'$, tiene como so como solución paramétrica

$$\begin{cases} x = x(p,c) \\ y = x(p,c)f(p) + g(p) \end{cases}.$$

Demostración. Dada la ecuación

$$y = xf(y') + g(y')$$

haciendo $y' = p$ con lo que obtenemos

$$y = xf(p) + g(p) \qquad (4)$$

derivando en ambos miembros respecto a x,

$$p = f(p) + [xf'(p) + g'(p)]p', \frac{dp}{dx} = p'$$

donde al escribir

$$p - f(p) = [xf'(p) + g'(p)]\frac{dp}{dx},$$

de aquí se resulta que tenemos una ecuación lineal

$$\frac{dx}{dp} - \left(\frac{f'(p)}{p-f(p)}\right)x = \frac{g'(p)}{p-f(p)},$$

se puede resolver buscando un factor integrante, nótese que para $f(p) = p$, se anula el denominador, pero en tal caso obtenemos la ecuación de Clairaut. Por tanto, la solución de la ecuación lineal saldrá x en término de p, es decir,

$$x = x(p,c).$$

La solución general en paramétrica de la ecuación de Lagrange se obtiene sustituyendo en (4),

$$\begin{cases} x = x(p,c) \\ y = x(p,c)f(p) + g(p) \end{cases} p \text{ parámetro. } \blacksquare$$

Ejemplo 36. Resuelve la ecuación diferencial

$$y = x(y')^2 - y'.$$

Solución. Se trata de la ecuación diferencial de Lagrange, haciendo $p = y' = \frac{dy}{dx}$, la ecuación queda

$$y = xp^2 - p\,, \qquad (a)$$

aplicando la derivada $\frac{dy}{dx} = p$ resulta

$$y' = p^2 + 2xpp' - p',$$

$$p = p^2 + (2xp - 1)\frac{dp}{dx},$$

lo cual es lineal de la forma

$$\frac{dx}{dp} + \left(\frac{2}{p-1}\right)x = \frac{1}{p(p-1)}$$

su factor integrante es $\mu(p) = exp\left(\int \frac{2}{p-1}dp\right) = (p-1)^2$. Luego la solución en x,

$$x(p) = \frac{p - \ln(p) + c}{(p-1)^2}. \qquad (b)$$

que sustituyendo en (a) se obtiene

$$y = \left(\frac{p-\ln(p)+c}{(p-1)^2}\right)p^2 - p \qquad \text{(c)}.$$

Por tanto (b) y (c) forman soluciones paramétricas de la ecuación diferencial.■

Ejemplo 37. Resuelve la ecuación diferencial

$$y = x(y')^2 + (y')^2.$$

Solución. Se trata de la ecuación diferencial de Lagrange, haciendo $p = y' = \frac{dy}{dx}$, la ecuación queda

$$y = xp^2 + p^2\,, \qquad \text{(a)}$$

aplicando la derivada $\frac{dy}{dx} = p$ resulta

$$y' = p^2 + 2xpp' + 2pp',$$
$$p = p^2 + (2xp + 2p)\frac{dp}{dx},$$

lo cual es lineal de la forma

$$\frac{dx}{dp} - \left(\frac{2p}{p-p^2}\right)x = \frac{2}{1-p}$$

la solución en x,

$$x(p) = -1 + \frac{c^2}{(p-1)^2}.$$

del sistema

$$\begin{cases} y(p) = xp^2 + p^2 \\ x(p) = -1 + \frac{c^2}{(p-1)^2} \end{cases}$$

que obtiene la solución general

$$y(x) = \left(c + \sqrt{x+1}\right)^2. \;■$$

PROBLEMAS 3.7

Halle la solución general de las ecuaciones diferenciales.

a) $y = x + (y')^2 - \frac{2}{3}(y')^3.$

R. Paramétrica $x = c - p^2$; $y = c - \frac{2}{3}p^3$, solución implícita $4(c-x)^3 = 9(c-y)^2$.

b) $y = 2xy' + \ln(y').$

R. $x = \frac{c}{p^2} - \frac{1}{p}$; $y = \frac{2c}{p} - 2 + \ln(p).$

c) $y = x + y' - 3(y')^2.$

R. $x(p) = -6p - 5\ln(p-1) + c$; $y(p) = -5p - 3p^2 - 5\ln(p-1) + c$. Además de estas, a partir de $p = 1$, se obtiene en $y = x + p - 3p^2$, la solución singular $y = x - 2$.

d) $y = x(y')^2 - y'$.

e) $y = x(y')^2 + (y')^2$.

***

CAPÍTULO 4

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

4.1 INTRODUCCIÓN

Es una realidad, una cosa permanente en nuestro universo es el cambio, podemos verlo porque nos sucede a todos, apenas uno empieza a comprender algún tema, cuando este ya está cambiando. Justamente este cambio o evolución corresponde a la ciencia estudiarlo, principalmente con las herramientas matemáticas, sobre todo ya estamos pensando en la derivada de una función. Los procesos pueden tener cierta complejidad, existen manera para establecer relaciones para construir ciertos modelos matemáticos donde queda involucrado las ecuaciones diferenciales.

Se estudian una variedad de modelos representativos en diversos campos y que están asociados con las ecuaciones diferenciales de primer orden, en lo posible se busca explicaciones racionales y sistemáticas de sus procesos. Es comprensible saber que para modelar algo, hay que seguir ciertos cuestionamientos: conocer la situación real del problema, plantear la abstracción (modelo), resolver el modelo y, aplicar el modelo estudiando las variables que intervienen. El propósito es describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno de la vida real, puede ser sociológico o económico, entonces se inicia con un conjunto de conjeturas, expresar las suposiciones en términos de ecuaciones diferenciales, lo cual es una formulación matemática, finalmente resolver las ecuaciones para obtener soluciones, mostrar las predicciones de ser posible gráficamente (Dennis, 1988).

Cuando se establece un modelo físico, en general interviene la variable tiempo t, así la solución refleja el estado del sistema, los valores de la variable dependiente (depende del tipo de modelo), para valores apropiados del tiempo t describe al sistema en el presente, pasado y futuro.

La solución tiene que ver con ecuaciones lineales y no lineales, separable, entre otros y, son aplicados en las ciencias como en las ingenierías, medicina, economía,

psicología, investigación de operaciones, física, biología, administración, química, matemática, mecánica y astronomía.

4.2. TRAYECTORIAS ORTOGONALES

En física, en un campo eléctrico bidimensional las líneas de fuerzas y las curvas equipontenciales son trayectorias ortogonales entre sí. Una aplicación elemental de las trayectorias ortogonales se puede ver, si se tiene un imán y se han esparcido limadura de hierro entorno de él, entonces las líneas de fuerza y las curvas equipontenciales son ortogonales.

Definición 4.1. Sea

$$F(x, y, c) = 0 \qquad (t_1)$$

una familia de curvas en plano XY; cuando una curva corta a las curvas de la familia (t_1) en ángulos rectos se dice que son trayectoria ortogonal a (t_1).

Se entiende la ortogonalidad de curvas en el sentido que cuando se intersectan en los puntos de corte sus rectas tangentes son perpendiculares entre sí.

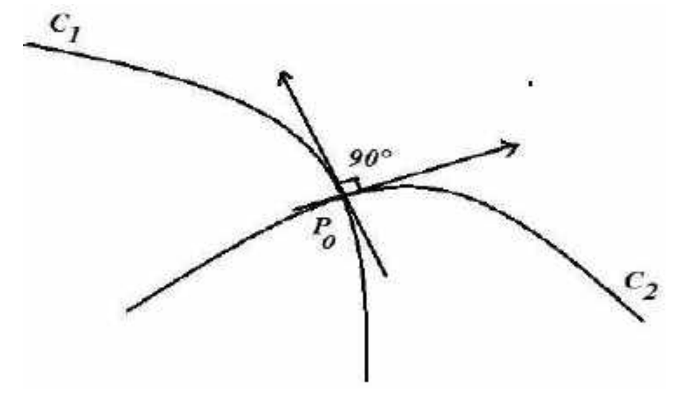


Figura 4.1. Trayectorias ortogonales

Explicamos el procedimiento para hallar las trayectorias ortogonales:

1. En la familia (t_1), diferenciamos implícitamente respecto de las variables x, y. Luego eliminamos la constante $c \in IR$, así se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (t_2)$$

2. Dado $f(x, y)$ describe la pendiente de una recta a la curva en el punto (x, y), bajo el concepto de ortogonalidad de rectas, se sustituye $f(x, y)$ por $-\frac{1}{f(x,y)}$, entonces la trayectorias ortogonales es la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)} \qquad (t_3)$$

3. Se resuelve la ecuación (t_3) y se obtiene una familia de curvas ortogonales $G(x, y, k) = 0$, con k constante arbitraria.

Ejemplo 1. Halle las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x^2 + y^2 - 2cx = 0$.

Solución. Cuando se escribe $(x - c)^2 + y^2 = c^2$, vemos que las curvas son familia de circunferencias con centro en $(c, 0)$ (en el eje X) y radio c.

Hallamos la ecuación diferencial asociada, derivando implícitamente

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2c$$

que reemplazando en la ecuación diferencial para eliminar la constante c

$$x^2 + y^2 = (2x + 2y\frac{dy}{dx})x$$

de donde la ecuación de la familia de curvas es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Planteamos la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales como,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{y^2 - x^2},$$

como se trata de una ecuación homogénea, hacemos el cambio $u = \frac{y}{x}$, es decir $(y = xu)$ de manera que se transforma en

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1 - u^2}.$$

Separando variables queda $\frac{(1-u^2)}{u(1+u^2)}dz = \frac{1}{x}dx$,

integrando

$$\int \left(\frac{1}{u} + \frac{-2u}{1+u^2}\right) du = \int \frac{1}{x}dx + c,$$

$$ln|u| - ln|1 + u^2| = ln|x| + c \ \text{ con } c \neq 0,$$

es decir $\frac{u}{1+u^2} = cx$, pero como responde al cambio $u = \frac{y}{x}$, se escribe como

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = c \ \text{ es decir } x^2 + y^2 = ky \ \text{ siendo } k \neq 0.$$

Por tanto, las trayectorias ortogonales son también familia de circunferencias con centro en el eje Y, agregamos como solución de equilibrio $(u = 0)$ a la recta $y = 0$. ■

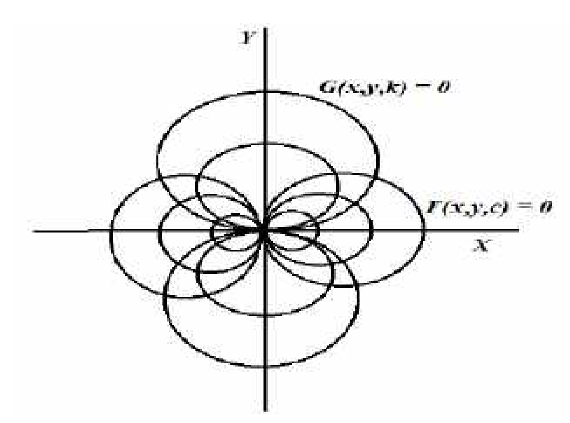


Figura 4.2. Trayectorias ortogonales, familia de circunferencias.

Ejemplo 2. Encontrar el conjunto de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $xy = c$.

Solución. Las curvas son familia de hipérbolas equiláteras (ver figura 3), derivando implícitamente se obtiene

$$xdy + ydy = 0,$$

y la ecuación diferencial se expresa por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Entonces la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales se escribe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y},$$

lo cual es una ecuación separable $ydy = xdx$, integrando en ambos miembros

$$\int ydx = \int xdx + c$$

de donde se obtiene que el conjunto de las trayectorias ortogonales es también la familia de hipérbolas $x^2 - y^2 = k$, con k constante arbitraria. ■

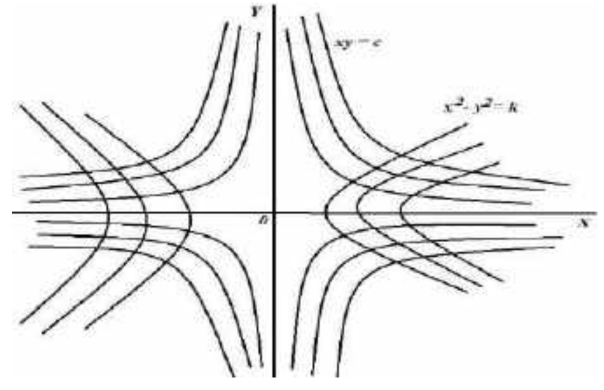


Figura 4.3. Trayectorias ortogonales familia de hipérbolas.

Ejemplo 3. Escribe las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $cx^2 + y^2 = 1$.

Solución. Si $c > 0$, las curvas son familia de elipses con centro en el punto (0,0), cuando $c < 0$ las curvas son familia de hipérbolas.

De la ecuación $cx^2 + y^2 = 1$ derivando respecto a x

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{cx}{y},$$

pero $c = \frac{1-y^2}{x^2}$ entonces se obtiene la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1-y^2}{xy} \qquad (1)$$

la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1-y^2}, \qquad (2)$$

la ecuación (2) es separable $\int \frac{1-y^2}{y} dy = \int xdt + c$

con solución $Ln|y| - \frac{y^2}{2} = \frac{t^2}{2} + c$,

es decir, las trayectorias ortogonales son

$$y = ke^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, \quad \text{siendo } k = e^c. \blacksquare$$

Ejemplo 4. Halle las trayectorias ortogonales de la $y^2 = cx^3$ donde c es constante.

Solución. Consideramos la familia de curvas

$$y^2 = cx^3,$$

derivando implícitamente se obtiene

$$2y\frac{dy}{dx} = 3cx^2 \text{ donde } c = \frac{y^2}{x^3}$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{2x},$$

entonces la ecuación diferencial de la familia de curvas ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\frac{3y}{2x}} = \frac{-2x}{3y}$$

separando variable

$$\int 3ydy = -\int 2xdx + k$$

$$\frac{3}{2}y^2 = -x^2 + k$$

por lo tanto, la curva ortogonal es una familia de elipses

$$3y^2 + 2x^2 = c. \blacksquare$$

Ejemplo 5. Halle un miembro de la familia de trayectorias ortogonales de $x + y = ce^y$ que pasa por el punto (0,5).

Solución. Consideramos la familia de curvas

$$x + y = ce^{y},$$

derivando implícitamente para obtener la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y-1},$$

la ecuación de la familia de curvas ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = -(x + y - 1),$$

esta ecuación es lineal

$$\frac{dy}{dx} + y = -x + 1$$

con factor integrante $u(x) = e^{x}$ se obtiene la solución general

$$y = 2 - x + ce^{-x},$$

en el punto (0,5) resulta $c = 3$, por lo tanto la curva ortogonal en este punto es

$$y = 2 - x + 3e^{-x}. \blacksquare$$

Ejemplo 6. Determine un miembro de la familia de trayectorias ortogonales de $3xy^2 - 2 = 3cx$ que pasa por (0,6).

Solución. Derivando de manera implícita la ecuación se obtiene

$$3y^2 + 6xy\frac{dy}{dx} = 3c,$$

reemplazando en la ecuación para eliminar la constante, la ecuación diferencial es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3x^2y},$$

luego la ecuación diferencial de la trayectoria ortogonal es

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y,$$

que resulta una ecuación separable, integrando

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3x^2dx + k \text{ de donde } y(x) = ce^{x^3}, c \in IR.$$

Aplicando la condición $y(0) = 6$ resulta $c = 6$. Por lo tanto, la curva buscada es

$$y(x) = 6e^{x^3}.\blacksquare$$

PROBLEMAS 4.1

1. **E**ncuentre las trayectorias ortogonales de cada una de las familias de curvas:
   a) De la familia de parábolas $y = cx^2$
   R. $x^2 + 2y^2 = k, (k > 0)$
   b) De la familia de circunferencias $x^2 + y^2 - 2cx = 0$

R. $x^2 + y^2 - kx = 0.$

c) De la familia de hipérbolas $xy - c = 0$,
R. $y^2 - x^2 = 2c.$

d) $y^2 = 1 - cx^2,$
R. $x^2 + y^2 = ln(y^2) + k.$

e) $y = ce^{-x}$
R. $\frac{y^2}{2} - x = k.$

f) $y = \frac{cx}{1+x}.$
R. $3y^2 + 3x^2 + 2x = k.$

g) $x^2 + y^2 = k.$
R. $y = cx.$

h) $y^2 - cx^3 = 0.$
R. $2x^2 + 3y^2 = k.$

i) $x^2 + y^2 - kx^3 = 0$,
R. $y^3 + x^2y = c.$

j) $y^2 = 2c(x + c).$

k) $y - x + 1 = ke^{-x}$,
R. $y - x = 1 - ce^{-y}.$

l) De la familia de circunferencias que son tangentes al eje Y en el origen.
R. $x^2 + y^2 = cy.$

2. Demuestre que las curvas definidas por $x = t^3$, $4 = t^2 + 3x^2$ son ortogonales en su punto de intersección.

3. Halle la trayectoria ortogonal de la familia $x(t) = ce^{-t}\cos(t)$, $y(t) = ce^{-t}sen(t)$.
R. $x(t) = ke^{t}\cos(t), y(t) = ke^{t}\text{sen}(t).$

4. Halle un miembro de la familia de trayectorias ortogonales de $1 + 2cx = 3xy^2$ que pasa por (0,3).

5. Encuentre la curva que pertenece a la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = ce^{y} - x$ que pasa por el punto (0,3).
R. $y(x) = 2 - x + e^{-x}.$

6. Encontrar la curva que pasa por el punto (1,1) y corta a las parábolas semicúbicas $y^2 - kx^3 = 0$ en ángulos rectos para todos los valores de k.
R. $2x^2 + 3y^2 = 5.$

4.3. ORTOGONALIDAD EN COORDENADAS POLARES

Dada una familia de curvas en coordenadas polares de la forma

$$\alpha(\theta) = (r_1(\theta)cos(\theta), r_1(\theta)sen(\theta)) \,. \qquad (s_1)$$

Para encontrar una familia ortogonal a (s_1) se asume otra curva también en coordenadas polares,

$$\beta(\theta) = (r_2(\theta)cos(\theta), r_2(\theta)sen(\theta)) \,. \qquad (s_2)$$

Ahora hacer que se cumpla la condición de ortogonalidad (sus vectores tangentes), es decir $\langle \alpha'(\theta), \beta'(\theta) \rangle = 0 = \alpha'(\theta).\beta'(\theta)$,

donde

$$\alpha'(\theta) = (r_1'(\theta)cos(\theta) - r_1(\theta)sen(\theta), r_1'(\theta)sen(\theta) + r_1(\theta)\cos(\theta))$$

$$\beta'(\theta) = (r_2'(\theta)cos(\theta) - r_2(\theta)sen(\theta), r_2'(\theta)sen(\theta) + r_2(\theta)\cos(\theta)),$$

haciendo operaciones y simplificaciones se obtiene $\langle \alpha'(\theta), \beta'(\theta) \rangle = 0$ si solamente si $r_1' r_2' = -r_1 r_2$; pero, en la intersección los radio vectores son iguales, esto es $r_1 = r_2$, luego lo que quiere hallar,

$$r_2' = -\frac{r_1^2}{r_1'},$$

de donde se deduce el siguiente método para obtener la familia de curvas ortogonales a una familia de curvas dada en coordenadas polares. La ecuación diferencial de la trayectoria ortogonal está dada por,

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{r'} \qquad (p_1)$$

basta reemplazar en (p_1) la función r' (habiendo anulado la constante arbitraria), luego resolver esta ecuación ya se tiene la otra familia ortogonal.

Ejemplo 7. Halle la ecuación de las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias $r = csen(\theta)$.

Solución. Las curvas son familia de circunferencias con centro en el eje Y; entonces derivando respecto de θ se obtiene

$$r' = ccos(\theta) \text{ y } r = csen(\theta)$$

donde $r' = r\frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)}$ lo cual reemplazamos en la ecuación de la familia ortogonal

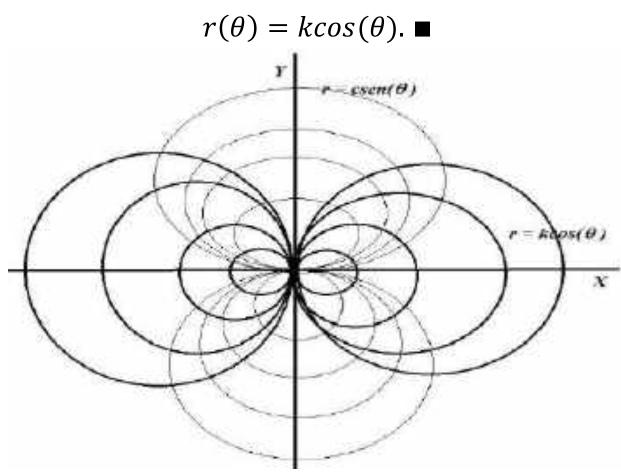
$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{r'} = -\frac{r^2}{r\frac{\cos(\theta)}{sen(\theta)}}$$

es decir

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-rsen(\theta)}{\cos(\theta)},$$

separando variables e integrando $\int \frac{dr}{r} = \int \frac{-sen(\theta)}{\cos(\theta)} d\theta + c$, de donde las trayectorias ortogonales son también familias de circunferencias con centros en el eje X,

$$r(\theta) = kcos(\theta). \blacksquare$$



Figuras 4.4: Familias de círculos ortogonales.

Ejemplo 8. Hallar la ecuación de las trayectorias ortogonales de la familia de espirales $r = k\theta$, con $r > 0$ y $0 < \theta < 2\pi$.

Solución. Derivando respecto de θ se obtiene $\frac{dr}{d\theta} = k$ y $k = \frac{r}{\theta}$ entonces

$$r' = \frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\theta}. \qquad (1)$$

Planteamos la ecuación diferencial de la familia de curvas ortogonales,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-r^2}{r'}, \qquad (2)$$

se sustituye (2) en (1) y queda

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-r^2}{\frac{r}{\theta}} = -r\theta,$$

separando variables e integrando resulta

$$ln|r| = -\frac{1}{2}\theta^2 + k,$$

Por tanto,

$$r(\theta) = ce^{\frac{-\theta^2}{2}} \text{ con } 0 < \theta < 2\pi. \blacksquare$$

Ejemplo 9. Halle la ecuación de las trayectorias ortogonales de la familia

$$r = c(1 - sen(\theta)).$$

Solución. Derivando con respecto de θ se obtiene

$$\frac{dr}{d\theta} = -ccos(\theta) \text{ y } r = c(1 - sen(\theta)$$

donde

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\mathrm{r}\cos(\theta)}{(1 - sen(\theta))}$$

es decir

$$r\frac{d\theta}{dr} = -\frac{(1 - \mathrm{sen}(\theta))}{cos(\theta)} = tan(\varphi_1)\,.$$

Se cumple la ortogonalidad si $tan(\varphi_1).tan(\varphi_2) = -1$, luego la trayectoria ortogonal es

$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{\cos(\theta)}{1 - sen(\theta)},$$

separando variables e integrando

$$\int \frac{dr}{r} = \int \frac{1 - sen(\theta)}{\cos(\theta)} d\theta + c,$$

de donde las trayectorias ortogonales son$r = k(1 + sen(\theta))$. ■

PROBLEMAS 4.2

1. Demuestre que dos curvas de ecuaciones polares $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$ son ortogonales en un punto de intersección si y sólo si $\big(tan(\varphi_1)\big).\big(tan(\varphi_2)\big) = -1$.
2. Halle las trayectorias ortogonales de la familia de curvas.
   a) $r = 2kcos(\theta)$.
      R. $r = csen(\theta)$.
   b) $r = c(1 - \mathrm{sen}(\theta))$
   c) $r = c(1 - \cos(\theta))$.
      R. $r = k(1 + \cos(\theta))$.
   d) $r = kcsc(\theta)$.
      R. $r = ksec(\theta)$.
   e) $r - ce^{\theta} = 0$.
   f) $r^2 = kcos(2\theta)$.
      R. $r^2 = csen(2\theta)$.
   g) $r = csen(\theta)$.
      R. $r = kcos(\theta)$.
   h) $r = c(3 + sen(\theta))$.
   i) $r = \frac{c}{1 + \cos(\theta)}$.

4.4. TRAYECTORIAS OBLICUAS

Definición 4.2. Sea

$$F(x,y) = c \qquad (o_1)$$

Una familia de curvas, se denomina trayectoria oblicua a la familia (o_1) a una curva que corta a la familia (o_1) formando ángulo distinto de 90°.

Seguimos el siguiente procedimiento para encontrar las trayectorias oblicuas: De la familia

$$F(x,y,c) = 0 \qquad (o_1)$$

diferenciando y eliminando la constante arbitraria c se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (o_2)$$

aquí $f(x,y)$ que es la pendiente de la recta tangente en el punto (x,y), de manera que la recta forma un ángulo de $tan^{-1}[f(x,y)]$, (ver figura 4). La recta tangente a una trayectoria oblicua que corta a esta curva formando un ángulo α tendrá entonces un ángulo de inclinación

$$\theta = tan^{-1}[f(x,y)] + \alpha - 180.$$

Por tanto, la pendiente de la trayectoria oblicua es

$$tan\theta = tan(tan^{-1}[f(x,y)] + \alpha)$$
$$= \frac{f(x,y)+tan\alpha}{1-f(x,y)tan\alpha}.$$

Se describe la ecuación diferencial de la familia de trayectorias oblicuas,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)+tan\alpha}{1-f(x,y)tan\alpha} \qquad (o_3)$$

Se resuelve la ecuación (o_3) para obtener una familia de curvas de trayectorias oblicuas

$$F(x,y,k) = 0$$

con k constante arbitraria.

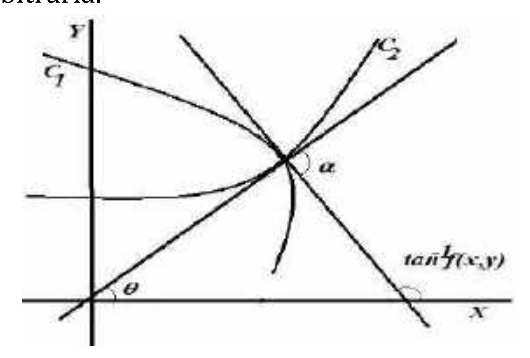


Figura 4.5. Trayectorias oblicuas.

Ejemplo 10. Halle la familia de trayectorias oblicuas que corta a la familia de rectas $y = cx$ formando un ángulo de 45 grados.

Solución. Derivando la ecuación $y = cx$ se obtiene $\frac{dy}{dx} = c$, es decir la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = f(x;y) \text{ y } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

La ecuación diferencial de la trayectoria oblicua se escribe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{tan\alpha + f(x,y)}{1 - f(x,y)tan\alpha} = \frac{\tan(45) + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}\tan(45)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}},$$

como la ecuación diferencial es homogénea hacemos $v = \frac{y}{x}$, que reemplazando se obtiene

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v}$$

y es una ecuación separable, integrando

$$\int \frac{1-v}{1+v} dv = \int \frac{dx}{x} + ln|k|$$

$$\arctan(v) - \frac{1}{2} ln|1 + v^2| = ln|x| + ln|k|.$$

Deshaciendo el cambio $v = \frac{y}{x}$ se obtiene $2arctan\left(\frac{y}{x}\right) - ln\left|1 + \frac{y^2}{x^2}\right| = 2ln|x| + 2ln|k|$, por tanto la trayectoria oblicua es la familia de curvas

$$ln[k^2(x^2 + y^2)] - 2arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 0.\blacksquare$$

Ejemplo 11. Determine las trayectorias de 45° de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = c$, con $c \geq 0$.

Solución. La ecuación diferencial de la familia de circunferencias es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = f(x,y) \text{ y } \alpha = 45°.$$

La trayectoria ortogonal de las trayectorias oblicuas es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{tan\alpha + f(x,y)}{1 - f(x,y)tan\alpha} = \frac{\tan(45) - \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}\tan(45)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}},$$

como la ecuación diferencial es homogénea hacemos $v = \frac{y}{x}$, que reemplazando se obtiene

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1-\frac{1}{v}}{1+\frac{1}{v}} = \frac{v-1}{v+1}$$

y es una ecuación separable, integrando

$$\int \frac{1+v}{1+v^2}dv = -\int \frac{dx}{x} + ln|k|$$

$$\arctan(v) + \frac{1}{2}ln|1+v^2| = -ln|x| + ln|k|.$$

Deshaciendo el cambio $v = \frac{y}{x}$ se obtiene $2arctan\left(\frac{y}{x}\right) + ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right| = -2ln|x| + 2ln|k|$, por tanto la trayectoria oblicua es la familia de curvas

$$ln[k^2(x^2+y^2)] - 2arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 0. \blacksquare$$

Observación: Exponenciando esta solución se escribe

$$k^2(x^2+y^2) = exp\left(-2artan(\frac{y}{x})\right),$$

usando coordenado polares $x = rcos\theta,\ y = rsen\theta$, la solución adopta la forma

$$re^{\theta} = c_1.$$

Ejemplo 12. Hallar las trayectorias isogonales a 45° de la familia $y(x+c) = 1$.

Solución. Hallamos la familia dada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+c} \text{ donde } c = \frac{1-xy}{y},$$

luego,

$$\frac{dy}{dx} = -y^2$$

por otro lado la ecuación diferencial de la familia isogonal es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2+tan45°}{1+y^2tan45°} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

ecuación variable separable,

$$\int \frac{1+y^2}{1-y^2}dy = \int dx + k$$

$$\int \left(-1 - \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1}\right)dy = x + k$$

$$-y - ln|y-1| + ln|y+1| = x + k$$

de donde $y = \frac{-1-ce^{x+y}}{1-ce^{x+y}}$. ■

Ejemplo 13. Halle las trayectorias isogonales a 45° de la familia $y = ce^{ax}$ donde c y a son constantes.

Solución. Hallamos la ecuación diferencial de la familia dada

$$\frac{dy}{dx} = cae^{ax} \text{ donde } c = \frac{y}{e^{ax}}$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = ay,$$

por otro lado, la ecuación diferencial de la familia isogonal es

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay+tan45°}{1-aytan45°}=\frac{ay+1}{1-ay}$$

y es una ecuación variable separable

$$\int\frac{1-ay}{1+ay}dy=\int dx+k$$

$$\int\left(-1+\frac{2}{1+ay}\right)dy=x+k$$

$$\frac{2}{a}ln|ay+1|-y=x+k.\ ■$$

PROBLEMAS 4.3

1. Halle una familia de trayectorias oblicuas que corte a la familia dada y un ángulo de dado:
   a) $y(x)=cx,\ \alpha=45°$
      R. $r^2=ke^{2\theta}$.
   b) $x(t)=-t+ct^2$, $\tan(\alpha)=2$.
      R. $4x^2+3tx+3t^2=kexp\left(\frac{2}{\sqrt{39}}arctan\left(\frac{3t+8x}{\sqrt{39}t}\right)\right)$.
   c) $y(x)=cx,\alpha=30°$
   d) $xy+cy=1,\ \alpha=45°$
      R. $y-2\arctan(y)=x+k$.
   e) $y(x)=ce^{bx}\ ,\ \alpha=45°$
      R. $y+\frac{2}{b}ln|by-1|=x+k$
   f) $x^2+y^2=k,\ \alpha=45°$.
      R. $re^{\theta}=c$.
2. Determine las trayectorias isogonales que se interseque a la familia de curvas $x+y=kx^2$ un ángulo α, tal que $\tan(\alpha)=2$.
   R. $ln(4y^2+3xy+3x^2)-\frac{2}{\sqrt{39}}Arctan\left(\frac{8y+3x}{\sqrt{39}x}\right)=k$.
3. Halle la familia isogonal que se interseca con la familia de rectas $y(x)=kx$, si $\tan(\alpha)=1$.
4. Halle la familia isogonal que se interseca con la familia de rectas $y(x)=kx$, si $\tan(\alpha)=\sqrt{3}$.
   R. $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{y}{x}\right)+ln[k(x^2+y^2)]=0$.
5. Determine la curva que pasa por $(e,0)$ y corta a cada miembro de la familia $y^2=k^2-x^2$ formando un ángulo de $\frac{\pi}{3}$.

R. $\frac{1}{2}ln|x^2+y^2|+\sqrt{3}arctan\left(\frac{y}{x}\right)=1.$

4.5. TRAYECTORIAS AUTO-ORTOGONAL

Definición 4.3. Se dice que una familia dada es auto-ortogonal si su familia de trayectorias ortogonales coincide con la familia dada.

Ejemplo 14. Sea la familia $y^2-kx-\frac{k^2}{4}=0$ con $k\in IR$, encuentre las trayectorias ortogonales.

Solución. Derivando implícitamente se obtiene la ecuación diferencial

$$2yy'=k \text{ y } y^2-kx-\frac{k^2}{4}=0$$

eliminando la constante arbitraria se obtiene $-y(y')^2-2xy'+y=0$, se comporta como una ecuación cuadrática para y', despejando (consideramos (+), igual se hace para (-)),

$$y'=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{-y}.$$

La ecuación diferencial de la familia ortogonal es

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$

al ser una ecuación homogénea se hace $v=\frac{y}{x}$ se tiene,

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v}{1+\sqrt{1+v^2}}$$

separando variables e integrando en ambos miembros se tiene $ln\left|\sqrt{1+v^2}\right|=ln|x|+c$, luego deshaciendo cambio resulta $\sqrt{x^2+y^2}=x+k$; donde $k=e^c$. Por tanto, se tiene la familia,

$$y^2-2kx-\frac{k^2}{4}=0,$$

que resulta la misma que la familia dada, entonces se trata de dos familias auto-ortogonales; en este caso, son familia de parábolas con vértice en $\left(\frac{-k}{4},0\right)$, eje focal el eje X; si $k=0$ se tiene la recta $y=0$; si $k>0$ las parábolas se abren a la derecha, si $k<0$ la familia de parábolas se abren a la izquierda, figura 4.6.

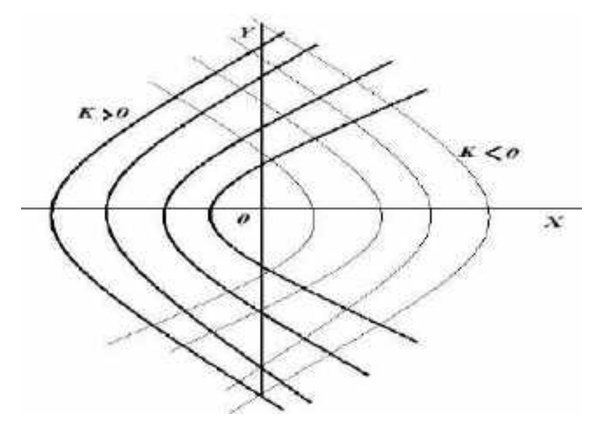


Figura 4.6: Familia de curvas auto-ortogonales.

PROBLEMA 4.4

1. Demuestre que la familia de parábolas $y^2 - 2kx - k^2 = 0$ es auto-ortogonal.
2. Demuestre que la familia de cónicas $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a-b} = 1$, siendo a una constante es autoortogonal.
3. Demuestre que la familia de curvas $c(c + 2x) = y^2$ es auto ortogonal.
4. Demuestre que $\frac{t^2}{c+2} + \frac{x^2}{c} = 1$ es auto ortogonal.

4.6 PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Las ecuaciones diferenciales ayudan a resolver variados problemas geométricos que tiene cierta dificultad si lo abordamos con otro método, gran cantidad de problemas tiene que ver con rectas tangentes y normales, no debemos perder de vista que el concepto de derivada surge como un problema de las tangentes.

Ejemplo 15. Determine la familia de curvas del plano que verifican que en cada punto A su recta normal corta al eje X en punto B tal que la distancia de B a A es uno.

Solución. No ubicamos en plano XY figura 2. Para resolver el problema consideramos que $y(x)$ es una curva de la familia y vamos a determinar la ecuación diferencial de dicha familia. Fijamos un punto arbitrario (x, y) de la gráfica de $y(x)$, entonces la ecuación de su recta tangente es $y_1 - y = y'(x)(x_1 - x)$, luego la recta normal es $y_1 - y = -\frac{1}{y'(x)}(x_1 - x)$); en este caso (x_1, y_1) son los puntos de la recta; para localizar el punto de corte con eje X,

hacemos que $y_1 = 0$, por tanto el punto de corte es $B = (x + yy', 0)$; además $A = (x, y)$.

Según el problema $d(B, A) = 1$ (distancia de B a A), de allí que,

$$\sqrt{(x + yy' - x)^2 + (0 - y)^2} = 1,$$

de donde se obtiene la ecuación diferencial $(yy')^2 + y^2 = 1$, es decir $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ al ser una ecuación de variable separable se obtiene la solución

$$-\sqrt{1 - y^2} = x + c \text{ en caso positivo,}$$

$$\sqrt{1 - y^2} = x + c \text{ en el caso negativo.}$$

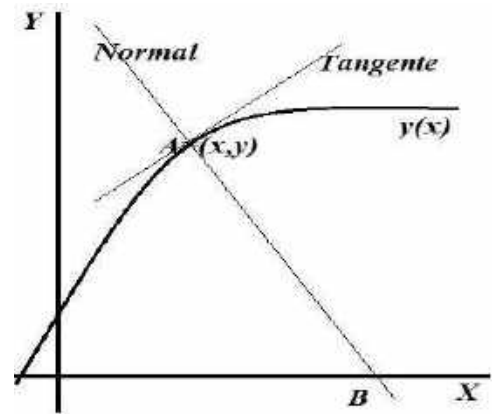


Figura 4.7: Ecuación de la recta normal a $y(x)$.

Ejemplo 16. Un punto se mueve en el primer cuadrante del plano XY de modo que la tangente a su trayectoria forma con los ejes coordenados un triángulo cuya área es a^2. Obtener la trayectoria.

Solución. Ver figura, el área del triángulo es

$$\frac{0A.OB}{2} = a^2 \qquad (1)$$

la recta tangente

$$y = mx + b \qquad (2)$$

con pendiente m cruza al eje Y en los puntos $x = -\frac{b}{m}$, $y = b$, que reemplazando en (1) se obtiene

$$\frac{\left(-\frac{b}{m}\right)b}{2} = a^2,$$

de donde $b = \pm a\sqrt{-2m}$, $-2m > 0$ (longitud dirigida), y sustituyendo en (2) se obtiene la ecuación diferencial

$$y = mx + \pm a\sqrt{-2m},$$

$$y = \frac{dy}{dx}x + \pm a\sqrt{-2\frac{dy}{dx}}\text{, al ser } m = \frac{dy}{dx},$$

al hacer $p = \frac{dy}{dx}$ se trata de la ecuación diferencial de *Clairaut*,

$$y = xp + \pm a\sqrt{-2p} \qquad (3)$$

aquí (3) es la familia de rectas y la ecuación de la envolvente es

$$2xy = a^2. \blacksquare$$

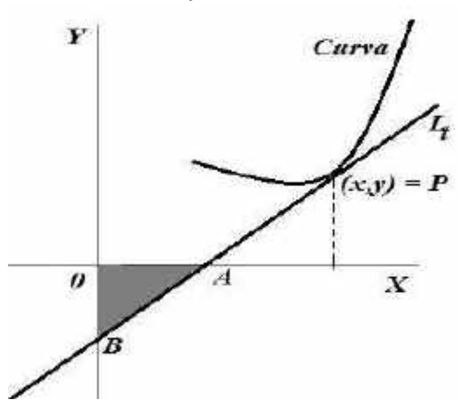


Figura 4.8. Recta tangente a la curva.

Ejemplo 17. Determine la ecuación de la curva de manera que el área limitada por la curva, dos ordenas cualesquiera, y el eje X es igual a la semisuma de estas dos ordenadas multiplicada por la distancia entre ellas.

Solución. Ver figura, sean (a, b) fijo, (x, y) variable, el área bajo la curva acotada por los eje X, es la integral

$$\int_a^x ydx,$$

luego ajustando a las condiciones se tiene

$$\int_a^x ydx = \left(\frac{y+b}{2}\right)(x-a),$$

derivando con respecto a x se obtiene la ecuación diferencial lineal,

$$y' - \left(\frac{1}{x-a}\right)y = -\frac{b}{x-a}.$$

Al tener un factor integrante $\mu(x) = \frac{1}{x-a}$ la ecuación pedida es

$$y(x) = c(x-a) + b. \blacksquare$$

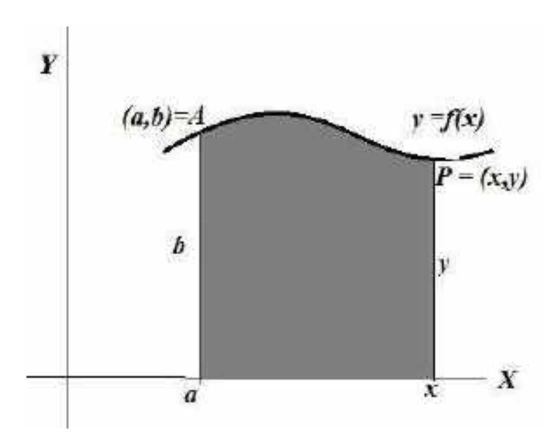


Figura 4.9. Área acotada bajo la curva.

Ejemplo 18. Encuentre la curva que tiene la propiedad de que la longitud del arco que une dos puntos cualesquiera de ella es proporcional al área bajo ese arco.
Solución. Ver figura, el área acotada bajo la curva en el intervalo $[a, x]$ es

$$\int_a^x y dx \,, \qquad (1)$$

por otra la longitud de arco en el mismo intervalo es

$$\left(\int_a^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx. \qquad (2)$$

Según enunciado (1) y (2) son proporcionales, si r es la constante de proporcionalidad,

$$\int_a^x y dx = r\left(\int_a^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx$$

derivando respecto a x, se obtiene una ecuación diferencial de variable separable,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{r}\right)^2 - 1},$$

la solución nos lleva a la ecuación de una Catenaria,

$$y(x) = r\left(\frac{e^{\frac{x+c}{r}} + e^{-\frac{x+c}{r}}}{2}\right),$$

en término de coseno hiperbólico se tiene

$$y(x) = r cosh\left(\frac{x+c}{r}\right). \blacksquare$$

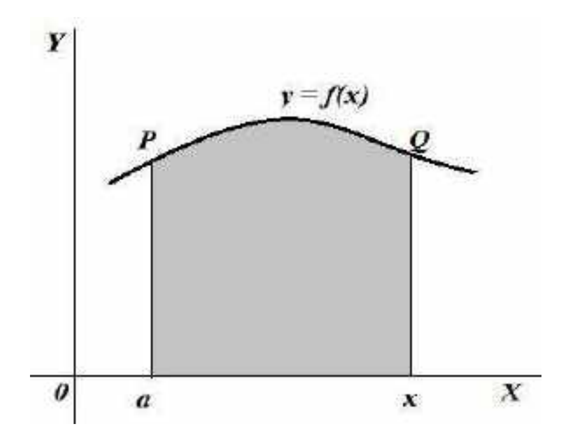


Figura 4.10. Longitud del arco PQ.

PROBLEMAS 4.5

1. En cada problema determine la ecuación de la curva que cumple la condición dada.
   a) La normal en un punto cualquiera y la recta que une el origen con ese punto forma un triángulo isósceles que tiene el eje X como base.
      R. $y^2 - x^2 = \text{k}$.
   b) La normal en un punto cualquiera pasa por el origen.
      R. $x^2 + y^2 = c$
   c) La longitud del arco desde el origen a un punto variable es igual al doble de la raíz cuadrada de la abscisa del punto.
      R. $y = \pm\left(arcsen\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{x - x^2}\right) + c$.
   d) La pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera es la mitad de la pendiente de la recta que va del origen al punto.
      R. $y^2 = cx$.
   e) El segmento de la normal trazada en un punto, cuyos extremos son este punto y el de intersección con el eje X es cortado en dos partes iguales por el eje Y.
      R. $2x^2 + y^2 = c$.
   f) La proyección sobre el X de una parte de la normal entre (x, y); y el eje tiene longitud uno.
      R. $y^2 = \pm 2x + c$.

g) Sabiendo que la normal en cada punto de una curva y la recta que une ese punto con el origen forma un triángulo isósceles cuya base está en el eje X. obtener la ecuación de la curva.
R. $y^2 - x^2 = k$.

2. Halle la ecuación de todas las curvas del plano TX para las cuales la longitud del segmento interceptado en el eje X por la normal a cualquier de sus puntos es igual a la distancia desde ese punto al origen de coordenadas.
R. $x(t) = \frac{1}{2}(ct^2 - \frac{1}{c})$.
3. Una curva pasa por el origen en el plano TX al primer cuadrante. El área bajo la curva bajo la curva de $(0,0)$ a (t,x) es un tercio del área del rectángulo que une esos puntos como vértice opuesto. Encuentre la ecuación de la curva.
R. $x(t) = ct^2$.
4. Encuentre la curva para las cuales la tangente en un punto $P(t,x)$ tiene interceptos sobre los ejes T y X cuya suma es $2(t+x)$.
R. $tx = c$.
5. Encuentre la ecuación de todas las curvas que tiene la propiedad de que la distancia de cualquier parte del origen, es igual a la longitud del segmento de normal entre el punto y el intercepto con el eje X.
R. $x^2 = \pm t^2 + k$.
6. Halle la ecuación de todas las curvas del plano TX que tiene la propiedad de que el triángulo formado por la tangente a la curva, el eje T y la recta vertical que pasa por el punto de tangencia siempre tiene un área igual a la suma de los cuadrados de las coordenadas del punto de tangencia.
R. $\ln(cx) = \frac{2}{\sqrt{15}} tan^{-1}\left(\frac{4t-x}{\sqrt{15}x}\right)$.
7. Halle la ecuación de todas las curvas del plano TX que tiene la propiedad de que la posición de la tangente entre (t,x) y el eje T queda partida por la mitad por eje X.
R. $x^2 = ct$.
8. Halle la ecuación de todas las curvas del plano TX que tiene la propiedad de que la longitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente es igual a la abscisa del punto de contacto.
Sol. $t^2 + x^2 - ct = 0$.
9. Halle la ecuación de todas las curvas del plano TX que tiene la propiedad de que la razón del segmento interceptado por la tangente en el eje OX al radio vector, es una cantidad constante c.

R. $x(t) = \frac{1}{2}\left(c_1 t^{1-c} - \frac{1}{c_1} t^{1+c}\right)$.

4.7 APLICACIÓN A LA ÓPTICA – ESPEJO PARABÓLICO

Problema. Encuentra la forma de un espejo curvo, de manera que la luz de una fuente en el origen se refleje en un haz de rayos paralelos al eje X.
Solución. El espejo tendrá la forma de una superficie de revolución al hacer girar una curva AQB (ver figura 4.11).

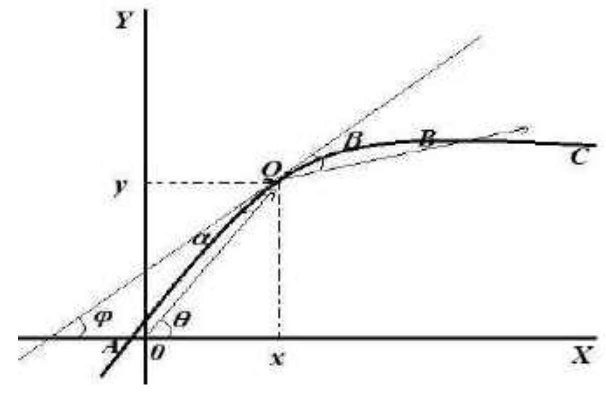


Figura 4.11: Curva parabólica.

De la ley de reflexión "igualdad entre el ángulo de incidencia α y el ángulo de reflexión β" (ley de Snell) se deduce que $\alpha = \beta$, y por geometría básica también $\varphi = \beta$, y por tanto $\theta = \varphi + \alpha$, es decir $\theta = 2\beta$, aplicamos tangente en ambos miembros,

$$tan(\theta) = tan(2\beta = \frac{2tan(\beta)}{1-tan^2(\beta)} \qquad (p_1)$$

pero, $tan(\theta) = \frac{y}{x}$, la definición de derivada dice que $ta\,n(\beta) = \frac{dy}{dx}$, reemplazando datos en (p_1) se obtiene

$$\frac{y}{x} = \frac{2\frac{dy}{dx}}{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

donde $\frac{dy}{dx} = \frac{-x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ es una ecuación de tipo homogénea, pero si observamos con cuidado es factible escribirlo así $xdx + ydy = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, esto es

$$\pm\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = dx,$$

integrando se obtiene $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = x + c$ es decir $y^2 = 2cx + c^2$. La ecuación es una familia de parábolas

$$y^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right),$$

con vértice en $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$ y foco común que es el origen. Por lo tanto, el espejo representa una superficie interna dada por un paraboloide de revolución.

4.8 LA CURVA TRACTRIZ

Es una curva en el plano XY con la propiedad de que el segmento de tangente limitado por el punto de tangencia y el eje X es constante, por eso a veces se le denomina equitangencial. El nombre de la curva se denomina tractriz, dado que viene del latín *tractum*, (que significa jalar, arrastrar), Boyce, 2005).

Al girar la tractriz alrededor de su asíntota genera una superficie parecida al embudo o la parte final de una trompeta (esa superficie se llama seudo esfera); fueron estudiadas por Bernoulli, Leibniz, Huygens; esta curva cobra importancia en la geometría no euclidiana usado por Lobachevsky. Las ecuaciones paramétricas, son:

$$x(x) = \text{sech}(t),\ y(t) = t - \tanh(t).$$

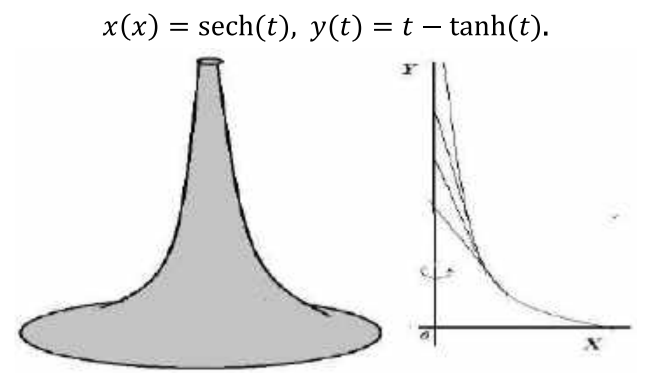


Figura 4.12: Seudo esfera y tractriz.

El problema. Se jala un punto R a lo largo del plano XY, por medio de una cuerda RP de longitud r . Si P parte del origen y se desplaza a lo largo del eje positivo Y, si R parte de $(r, 0)$. Obtener la trayectoria de la curva.

Solución. La figura 4.13 muestra los datos del problema, y se obtiene

$$tan(\pi - \theta) = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x} \text{ es decir } \tan(\theta) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x} \qquad (t_1)$$

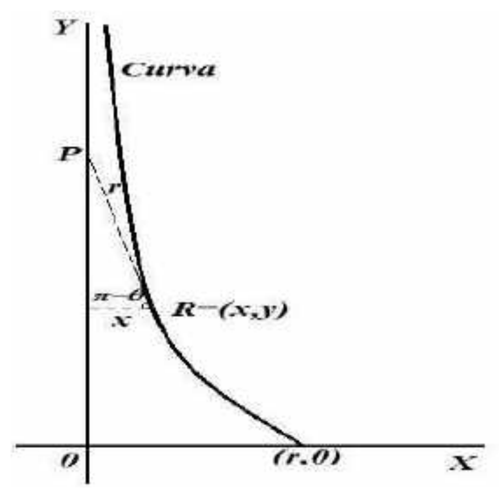


Figura 4.13: Curva tractriz.

La ecuación (t_1) es de variable separable, integramos directamente,

$$\int dy = -\int \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{x} dx + c,$$

resulta $y(x) = -rln\left|\frac{r-\sqrt{r^2-x^2}}{x}\right| - \sqrt{r^2-x^2} + c$, al aplicar la condición inicial $y(r) = 0$ s obtiene $c = 0$. Por tanto, la curva tractriz es

$$y(x) = rln\left(\frac{r+\sqrt{r^2-x^2}}{x}\right) - \sqrt{r^2-x^2}. \blacksquare$$

4.9 LA CURVA CATENARIA

Es un problema planteado allá por el siglo XVII, tiene importancia en la física matemática. Se entiende como un cable o cadena que está fijo por sus dos extremos y no está sometido a otras fuerzas distintas, sólo a su propio peso. Antiguamente muchos los confundieron con la parábola, pero no son los mismos; por cierto, los resolvieron Bernoulli simultáneamente con Leibinz y Huygens. Esta curva se llama *catenaria*, por la palabra latina *catena* (quiere decir cadena); de allí que el problema tiene que ver con cadena flexible que cuelga bajo su propio peso (Simmons, 1995).

El problema. Obtener la curva que describe una cadena flexible suspendida entre dos puntos y que cuelga con su propio peso.

Solución. Es un problema que tiene varios conceptos, ver figura 2.7. Tenemos, A es punto más bajo de cadena, $u(s)$ densidad de cadena, s la longitud del arco del

punto A a un punto arbitrario (x,y); T_0 la tensión en punto más bajo; T es la tensión en cualquier (x,y) actúa tangencialmente, con estos datos se deduce que, Componente horizontal:

$$T_0 = Tcos(\alpha) \qquad (1)$$

Componente vertical:

$$Tsen(\alpha) = \int_0^s u(s)ds. \qquad (2)$$

Por cierto, todas las componentes horizontales de la tensión son iguales. De (1) obtenemos la rapidez, $\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{Tsen(\alpha)}{T_0}$, es decir $T_0\tan(\alpha) = Tsen(\alpha)$, rapidez es la derivada (tangente), entonces $T_0\frac{dy}{dx} = Tsen(\alpha)$, que reemplazando en (2) se obtiene,

$$T_0\frac{dy}{dx} = \int_0^s u(s)ds\,. \qquad (3)$$

En (3) derivando en ambos miembros respecto a x, y luego aplicar el teorema fundamental del calculo

$$T_0\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^s u(s)ds\right) = \frac{d}{ds}\left(\int_0^s u(s)ds\right)\frac{ds}{dx} = u(s)\frac{ds}{dx},$$

$$T_0\frac{d^2y}{dx^2} = u(s)\frac{ds}{dx}, \qquad (4)$$

donde la longitud de arco es $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, además para completar se asume como información que la densidad es constante $u(s) = u_0$ y sea también $r = \frac{u_0}{T_0}$; todos stos datos en (4) se tiene,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

ecuación diferencial que aplicamos reducción a orden uno, haciendo $z = \frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, entonces se obtiene la ecuación separable $\frac{dz}{dx} = r\sqrt{1+z^2}$, integrando

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}dz = r\int dx + k$$

$$Ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right| = rx + k \text{ con } z(0) = 0 \text{ se tiene } k = 0.$$

Por tanto

$$z = \frac{1}{2}(e^{rx} - e^{-rx}),$$

pero deshaciendo cambio $z = \frac{dy}{dx}$ se obtiene nuevamente una ecuación separable

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{rx} - e^{-rx}),$$

integrando

$$y(x) = \frac{1}{2}\int(e^{rx} - e^{-rx})dx + c = \frac{1}{2r}(e^{rx} + e^{-rx}) + c,$$

Como satisface la condición $y(0) = \frac{1}{r}$ se tiene $c = 0$. Por tanto, la curva* catenaria es

$$y(x) = \frac{1}{2r}(e^{rx} + e^{-rx}) = \frac{1}{r}\cosh(rx). \blacksquare$$

***Observación**: Coseno hiperbólico $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$.

4.10 LA BRAQUISTÓCRONA

Es un problema muy antiguo de la mecánica, tiene que ver con el descenso más rápido entre dos puntos, y ver cuál es la curva, en su búsqueda se experimentaron con muchos objetos. Galileo conjeturó que descendía más rápido por un camino semicircular, más tarde Jean Bernoulli (1696) se planteó el problema para una curva arbitraria denominada braquistócrona, nombre que proviene del griego "*braquisto*" "el más corto" y *chronos* "tiempo". La sorpresa es que la curva buscada resultó siendo una cicloide.

El nombre de la cicloide fue dado por Galileo; esta curva tiene propiedades geométricas y físicas interesantes. Justamente para este problema, la cicloide tiene la propiedad braquistócrona, quiere decir, si tenemos dos puntos a distintas alturas y nos preguntamos cual es la curva que une esos dos puntos con la propiedad que un objeto que se desliza sobre la curva toma el menor tiempo posible en ir desde el punto más alto al más bajo con tan solo la acción de la gravedad; esta curva es una cicloide. Esto lo probaron Newton, Leibniz, Jacob Bernoulli y l´Hopital.

Los fundamentos son *el principio de la mínima acción y la Ley de Snell*; para poder encontrar las ecuaciones paramétricas de la Braquistócrona se analiza el paso de un haz de luz de un medio de densidad diferente, en el cual el haz viaja con rapidez v_1, a otro en el cual disminuye su rapidez a v_2. Se parte del principio de Fermat del tiempo mínimo, el cual establece la hipótesis de que la luz viaja de un punto a otro a través del camino que le exija el menor tiempo posible (Braum, 1990).

El problema. Se tiene A y B dos puntos, una partícula de masa m se desplaza sobre una rampa lisa sobre la cual, y desde punto A se suelta una partícula de masa m que comienza a moverse bajo la acción de la gravedad hacia B. Encontrar la trayectoria por la cual el descenso requiere menos tiempo.

Solución. Aquí aplicamos las ideas seguido por Bernoulli y asociado con un problema de óptica. Nos ayudamos con la figura 4.14. Supongamos tener un rayo de luz que viaja en medios de densidad creciente. De A hasta M lo hace a velocidad v_1, y de M hasta B a velocidad v_2; entonces el tiempo total es

$$T = \frac{\sqrt{m^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{n^2+(c-x)^2}}{v_2}. \qquad (b_1)$$

Si el rayo sabe elegir el camino que minimiza el tiempo, entonces se tiene $\frac{dT}{dt} = 0$, luego en (b_1) derivando respecto a t,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{x}{v_1\sqrt{m^2+x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{n^2+x^2}} \text{ es decir } \frac{x}{v_1\sqrt{m^2+x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{n^2+x^2}},$$

Se compara con

$$\frac{sen\theta_1}{v_1} = \frac{sen\theta_2}{v_2}. \qquad (b_2)$$

Vemos que (b_2) se conoce como la de refracción de Snell, Por otro lado si los medios fueran más para $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \dots; v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots$, entonces

$$\frac{sen\theta_1}{v_1} = \frac{sen\theta_2}{v_2} = \frac{sen\theta_3}{v_3} = \frac{sen\theta_4}{v_4} = \cdots$$

Ahora podríamos pensar en el límite de un rayo cruzando un medio de densidades variables y se llegaría de todas maneras a un límite $\frac{sen\theta}{v} = constante$; por analogía es la misma situación de la luz al caer a la tierra atravesando las distintas capas de la atmosfera. Por lo tanto, pensar el objeto de masa m que cae desde A hasta B, la situación es similar, luego se tiene,

$$\frac{sen\theta}{v} = c\ . \qquad (b_3)$$

Por el principio de conservación de la energía, la energía cinética en t es igual a la energía potencial perdida y también $v = \sqrt{2gy}$, además por el problema se cumple

$$sen\theta = cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

reemplazando en (b_4) $\frac{\left(1+(y')^2\right)^{-1/2}}{\sqrt{2gy}} = c$, acumulando las constantes la ecuación diferencial de la Braquistócrona es

$$y(1+(y')^2) = k,$$

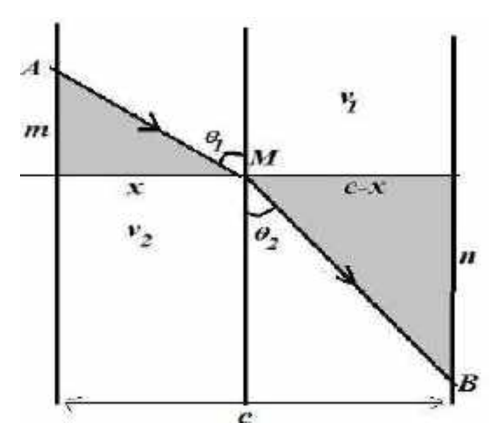


Figura 4.14: Análisis geométrico para obtener la Braquistócrona.

Concretamente es la ecuación de variables separable $\sqrt{\frac{y}{k-y}}dy = dx$. Es conveniente un cambio trigonométrico $\sqrt{\frac{y}{k-y}} = \tan(\alpha)$ de donde $y = csen^2(\alpha)$ diferenciando $dy = 2csen(\alpha)\cos(\alpha)$, es decir $dx = (\tan(\alpha))(2csen(\alpha)\cos(\alpha) = 2csen^2(\alpha)d\alpha$, integrando se resulta

$$x = \int 2csen^2\alpha d\alpha + k_1$$

con $x = 0 = y$ para $\alpha = 0$ se obtiene $k_1 = 0$,

$$x = \frac{c}{2}(2\alpha - sen(2\alpha));\ y = \frac{c}{2}(1 - \cos(2\alpha)).$$

Por tanto si hacemos $\frac{c}{2} = a$ y $2\alpha = t$ se obtienen las ecuaciones paramétricas de curva cicloide (invertida)

$$x(t) = a(t - sent)$$
$$y(t) = a(1 - cost).\ \blacksquare$$

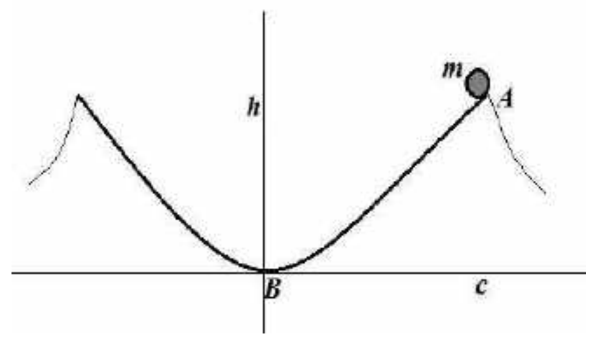


Figura 4.15: Cicloide invertida, trayectoria que minimiza el tiempo recorrido.

4.11 CURVA DE PERSECUCIÓN

Son curvas conciertas características donde hay diferencia de velocidades, según el contexto son variados: submarinos, presas, depredadores; es decir en general los actores pueden cambiar, pero la intención es casi la misma, uno atrapar al otro (Edwards, 2009).

El problema (perro versus conejo). Determine la curva que describe un perro P, que persigue con velocidad constante v_1 al conejo C que va en línea recta y con velocidad constante v_2; suponiendo que el perro sale en el tiempo $t = 0$ desde el origen mientras que C lo hace desde el punto $(a, 0)$ hacia arriba sobre la recta $x = a$.

Solución. Se muestra los datos en la figura 4.16, puesto que P persigue a C, entonces en todo momento t la tangente en $A = (x, y)$ debe cortar a la recta $x = a$ en el punto $B = (a, v_2 t)$. Entonces tenemos

$$\tan(\theta) = \frac{dy}{dx} = \frac{v_2 t - y}{a - x} = \frac{y - v_2 t}{x - a}, \qquad (1)$$

como se conoce la velocidad a la que se desplaza P, entonces sabemos que recorre una distancia $v_1 t$ en un tiempo t. Pero esta distancia es también la longitud de la curva de persecución desde (0,0) hasta $A = (x, y)$, entonces

$$v_1 t = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(z))^2}\, dz\,, \qquad (2)$$

ahora despejamos t de (1) y lo reemplazamos en (2) se obtiene

$$y - (x - a)\frac{dy}{dx} = \frac{v_2}{v_1}\int_0^x \sqrt{1 + (y'(z))^2}\, dz, \qquad (3)$$

En (3), derivando respecto a x en ambos miembros es

$$-(x - a)y'' = \frac{v_2}{v_1}\left(\sqrt{1 + (y')^2}\right),$$

luego se reduce a orden uno haciendo $z = y'$ resultando una ecuación de variable separable,

$$-\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}dz = \frac{v_2}{v_1(x-a)}dx,$$

Integrando $-\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}dz = \int \frac{v_2}{v_1(x-a)}dx + k$

$$-ln\left|z + \sqrt{1 + z^2}\right| = \frac{v_2}{v_1} ln|x - a| - \frac{v_2}{v_1} ln|-a|$$

siendo $z(0) = 0 = x(0)$,

$$ln\left|z + \sqrt{1 + z^2}\right| = ln\left|1 - \frac{x}{a}\right|^{-\frac{v_2}{v_1}}$$

$$z(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\frac{v_2}{v_1}} - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}\right]. \qquad (4)$$

Deshaciendo cambio en (4), si $z = \frac{dy}{dx}$, nuevamente es una ecuación separable, de manera que integrando,

$$y(x) = \frac{1}{2}\int\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{v_2}{v_1}} - \left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}\right]dx + c$$

$$y(x) = \frac{a}{2}\left[-\frac{v_1\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{v_2}{v_1}}}{v_1-v_2} + \frac{v_1\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{v_2}{v_1}}}{v_1+v_2}\right] + c,$$

siendo $c = \frac{av_1v_2}{v_1^2-v_2^2}$ cuando $y(0) = 0$. Por tanto, curva es

$$y(x) = \frac{av_1}{2}\left[\frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{v_2}{v_1}}}{v_1+v_2} - \frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{v_2}{v_1}}}{v_1-v_2}\right] + \frac{av_1v_2}{v_1^2-v_2^2}. \blacksquare$$

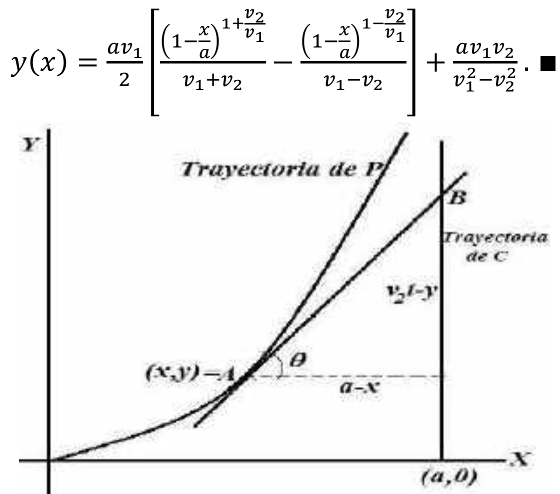


Figura 4.16: Curva de persecución.

DESTRUTOR Y SUBMARINO

El problema. En medio de una gran neblina, un destructor y un submarino de dos naciones distintas se descubren estando a 3 km de distancia. Inmediatamente el submarino se sumerge y avanza en una dirección fija a toda velocidad. ¿Qué trayectoria debe seguir el destructor para asegurarse de que estará encima del submarino si tiene una velocidad dos veces que la del submarino?

Solución. Utilizamos coordenadas polares para la trayectoria que debe seguir el submarino. Para estas coordenadas polares se cumple que el diferencial del arco es,

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}d\theta\ .$$

El destructor avanza a toda velocidad 3 km en dirección al punto donde localizó el submarino, a partir de ese punto, se denotamos por $r = r(\theta)$, la trayectoria que debe seguir el destructor, ver figura. La distancia ds que recorre el submarino hasta el punto donde las trayectorias se cortan es $d_S = r - 1$ y la distancia d_D que recorre el destructor hasta la intersección es $d_D = 2(r-1)$ por su velocidad el doble de la del destructor.
Entonces se cumple que

$$d_D = 2(r-1) = \int_0^\theta ds = \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 d\theta},$$

derivando con respecto a θ ambos lado de la desigualdad, resulta

$$2\frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}$$

$$4\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2,$$

lo cual se reduce a una ecuación de variable separable $\sqrt{3}\frac{dr}{d\theta} = r$, para saber cuál es la trayectoria que debe seguir el destructor se resuelve,

$$r(\theta) = e^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}+c},$$

pero $\theta = 0. r = 1$ esto da $c = 0$. Por tanto el destructor sigue la trayectoria,

$$r(\theta) = e^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}}. \blacksquare$$

Después de haber avanzado 3 km en línea recta en dirección a donde localizó el submarino, puede estar seguro que pasará por encima del submarino sin importar que dirección sigue este último. Finalmente, es claro que no es la única curva trayectoria que puede seguir el destructor. Nota, para transformación a coordenadas polares: $x = rcos(\theta)$ y $y = rsen(\theta)$.

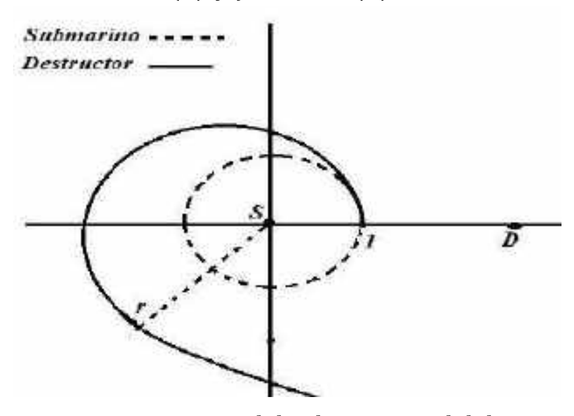


Figura 4.17. Trayectoria del submarino y del destructor.

PROBLEMAS 4.6

1. Cuatro caracoles situados en las esquinas de un cuadrado $[0, b]x[0, b]$ comienzan a moverse con la misma velocidad dirigiéndose cada uno hacia el caracol situado a su derecha. Calcule la distancia que recorre los caracoles al encontrarse.
   R. b unidades.
2. Un destructor está en medio de una niebla muy densa, por momento se despeja y deja ver al submarino enemigo en la superficie a cuatro kilómetros de distancia. Asumiendo que, a) el submarino se sumerge inmediatamente y avanza a toda máquina en dirección desconocida; b) el destructor viaja tres kilómetros en línea recta hacia el submarino. Determine la trayectoria que debería seguir el destructor para estar seguro que pasará directamente sobre el submarino, si su velocidad v_1 es tres veces la del submarino.
   R. $r = e^{\frac{\theta}{\sqrt{8}}}$.
3. Un conejo parte del origen y corre por eje Y con una velocidad v_1. Al mismo tiempo, un perro que corre con la velocidad v_2, parte del punto $(a, 0)$ y sigue al conejo. (a) Obtener la trayectoria del perro, (b) calcular la distancia que recorre el conejo antes de que atrape al perro.
   R. (a) $y = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{1+k} - \frac{1}{1-k}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k}\right] + \frac{a^k}{1-k^2}$, (b) $\frac{ak}{1-k^2}$, $k = \frac{v_1}{v_2}$.
4. Un halcón A situado en $(a, 0)$descubre una paloma P en el origen, la cual vuela a lo largo del eje Y a una velocidad v_2; el halcón emprende vuelo al instante hacia la paloma con velocidad v_1. Determine la trayectoria seguido por halcón en su persecución.
   R. $y(x) = \frac{av_1}{2}\left[\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{v_2}{v_1}}}{v_1+v_2} - \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{v_2}{v_1}}}{v_1-v_2}\right] + \frac{av_1v_2}{v_1^2-v_2^2}$.
5. Asumiendo que la recta $x = a$ y el eje Y forman las orillas de un río cuya corriente tiene una velocidad v_1(en la dirección negativa del eje Y). Un hombre está en el origen y su perro está en el punto $(a, 0)$. Cuando el hombre llama al perro, éste se lanza al río y nada hacia el hombre a una velocidad constante v_2, donde $v_2 > v_1$. Obtener la trayectoria seguida por el perro.
   R. $y(x) = \frac{x}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{v_1}{v_2}} - \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{v_1}{v_2}}\right]$.

6. Considere el problema 4, si $v_2 < v_1$; ¿el perro tocará la orilla? Por otro lado suponga que el hombre camina río abajo a la velocidad v_1 mientras llama a su perro. ¿Podrá esta vez el perro tocar la orilla?
   R. Si, en el punto $\left(0, -\frac{av_1}{v_2}\right)$.
7. Con los datos del problema resuelto, a) halle el punto en A intercepta a B; b) Obtener la curva de persecución si $v_2 = v_1$; ¿el perro alcanzará al conejo?
   R. $y(x) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right) - ln\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]$.

4.12 DESINTEGRACIÓN RADIOACTIVO

Cuando observamos cierta cantidad de sustancia o material radioactivo, conforme pasa el tiempo se observa un cambio en la cantidad, entonces pensamos que algo está sucediendo; la cantidad de materia (N) depende del tiempo (t); decir $N = N(t)$. Por otro lado, cada material radiactivo tiene sus características propias, según el paso del tiempo se produce una desintegración o decaimiento del Material. Naturalmente, este material no desaparece, lo que ocurre es la configuración interna de sus átomos varían y dejan de ser radioactivos.

Existen trabajos (cita), donde experimentalmente se ha llegado al conocimiento que conforme transcurre el tiempo $t \geq 0$, la velocidad o rapidez de cambio de la cantidad del material $N(t)$ es directamente proporcional a la cantidad de material presente, es decir

$$\frac{dN(t)}{dt} \text{ es proporcional a } N(t),$$

donde $\frac{dN(t)}{dt}$ representa a la rapidez (derivada), luego considerando la proporcionalidad se escribe

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \qquad (e_1)$$

justamente donde r es la constante de proporcionalidad. Ahora como existe desintegración, entonces la cantidad $N(t)$ del material disminuye conforme pasa el tiempo, por lo tanto se cumple $\frac{dN(t)}{dt} < 0$, esto influye a que $r < 0$, pues $N(t) > 0$. La solución de (e_1) al ser separable se obtiene

$$N(t) = ce^{rt} \qquad (e_2)$$

donde c es una constante arbitraria. Casi siempre se conoce la cantidad de material inicialmente en el tiempo $t = 0$, es decir $N(0) = N_0$; esto permite calcular el valor de la constante $c = N_0$ reemplazando e la ecuación (e_2), así la solución es

$$N(t) = N_0 e^{rt}. \qquad (e_3)$$

Dependiendo del problema puede ser necesario tomar inicialmente un tiempo t_0, con lo que la solución (e_3) es $N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}$.

El valor de la constante de proporcionalidad r se puede calcular si se conoce la cantidad de material existente en otro tiempo, digamos $t_1 > 0$; entonces se cumple $N(t_1) = N_1 < N_0$ puesto que el material está en desintegración, en (e_3)

$$N(t_1) = N_1 = N_0 e^{rt_1} \text{ es decir } e^{rt_1} = \frac{N_1}{N_0},$$

finalmente tomando logaritmo natural en ambos miembros se obtiene como calcular r

$$r = \frac{lnN_1 - lnN_0}{t_1}.$$

Por otro lado, muchos de los materiales radioactivos tienen que ver con su *vida media*. Cuando se tiene la muestra para dos tiempos esto permite calcular la constante de proporcionalidad.

Vida media. Cuando la cantidad de material N_0 se reduce a la mitad a la mitad en un tiempo dado, a este tiempo se le llama la vida media (t_m) del material radiactivo; $N(t_m) = \frac{N_0}{2}$, que lo podemos calcular así,

$$N(t_m) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{rt_m} \text{ es decir } e^{rt_m} = \frac{1}{2}$$

de donde tomando logaritmo natural se obtiene $t_m = \frac{-ln2}{r}$, se observa que la vida media no depende de la cantidad de material inicial.

Cálculo de la razón de proporcionalidad. Sean $t_1 < t_2$ dos tiempos donde se conocen $N(t_1) = N_1$ y $N(t_2) = N_2$, entonces $N_1 = ce^{rt_1}$, $N_2 = ce^{rt_2}$ de donde se obtiene

$$r = \frac{lnN_2 - lnN_1}{t_2 - t_1}.$$

Ejemplo 19. Se sabe un material radiactivo se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Considerando que inicialmente hay 140 mg de material y luego de dos años, se observa que el 5% de la masa original se desintegró, determinar: a) una expresión para la masa en el instante t; b) el tiempo necesario para que se desintegre el 8% de la masa original.

Solución. Sea $N(t)$ la cantidad presente (en miligramos) de material radioactivo en tiempo de t años, así $N(t)$ es un problema con valores iniciales,

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t), \; N(0) = 140, N(2) = 133$$

como se desintegró el 5% entonces queda $40 - 7 = 133$.

La solución de la ecuación diferencial con valor inicial es $N(t) = 140e^{rt}$, aplicamos la condición $N(2) = 133$ para hallar r constante de proporcionalidad, así

$$N(2) = 133 = 140e^{2r}$$

Entonces

$$r = \frac{ln\left(\frac{133}{140}\right)}{2} \approx -0{,}0256466472.$$

Por lo tanto la expresión para la masa en el instante t, es

$$N(t) = 140e^{-0{,}0256466472t}\ . \qquad (1)$$

a) Cuando se desintegra el 8% de la masa quedan 128.8 mg de la misma, luego aplicando el resultado (1) se obtiene

$$128.8 = 140e^{-0{,}0256466472t}\ ,$$

de donde

$$t = \frac{ln\left(\frac{128.8}{140}\right)}{-0{,}02566466472} \approx 3{,}490230596\ ,$$

aproximadamente $t \approx 3{,}25$ años para que se desintegre el 8% de la masa original. ■

Ejemplo 20. Si de 200 gramos de una determinada sustancia radioactiva quedan 50 gramos al cabo de 100 años; a) calcular la vida media; b) ¿Cuántos gramos de sustancia radioactiva quedarán transcurrido el siglo y medio?

Solución. Sea $N(t)$ la cantidad de sustancia radioactiva en el instante t, entonces de acuerdo al modelo se tiene el problema de valor inicial,

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t),\ \ N(0) = 200, N(100) = 50$$

cuya solución está dada por

$$N(t) = 200e^{rt},$$

aplicando la condición $N(100) = 50$ resulta $50 = 200e^{100r}$, de donde

$$r = \frac{-ln2}{50} \approx -0{,}138629.$$

Por lo tanto, la masa en función del tiempo es $N(t) = 200e^{-0{,}0138629t}$.

Si t_m es la vida media, $t_m = \frac{N_0}{2} = \frac{200}{2} = 100$, aplicamos en la ecuación de estimación

$$N(t_m) = 100 = 200e^{-0{,}0138629(t_m)}$$

de donde $t_m = \frac{ln2}{0{,}0138629} \approx 50{,}000157$, tenemos una vida media aproximadamente unos 50 años. Finalmente en $t = 150$ años (un siglo y medio) se tiene

$$N(150) = 200e^{-0{,}0138629(150)} \approx 25{,}00016\ gr\ .$$

Por lo tanto en 150 años se reduce a unos 25 gr de material radioactivo.■

Ejemplo 21. Un material radioactivo se desintegra en dos quintos durante 1000 años. Determine su media.

Solución. Asumiendo que se cumple el modelo de desintegración, siendo la ecuación diferencial con valores iniciales

$$\frac{dN(t)}{dt} = ce^{rt}, N(0) = N_0 \text{ y } N(1000) = \frac{2N_0}{5}.$$

se tiene $N(t) = N_0 e^{rt}$ y $N(1000) = \frac{2N_0}{5} = N_0 e^{1000r}$ de donde resulta

$$r = \frac{ln\left(\frac{2}{5}\right)}{1\,000} \approx -0{,}00091629.$$

Por lo tanto, la vida media es $t_m = \frac{-ln2}{r} = \frac{-ln2}{-0{,}00091629} \approx 756{,}41$ años.■

Ejemplo 22. Los neutrones en una pila atómica crecen a una razón proporcional al número de neutrones presentes en cualquier tiempo (debido a la fisión nuclear). Al comienzo hay N_0 neutrones y después se tiene N_1 y N_2 neutrones presentes en el tiempo t_1 y t_2, respectivamente, demuestre que $\left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{t_2} = \left(\frac{N_2}{N_0}\right)^{t_1}$.

Demostración. Se trata de un problema con valor inicial

$$\frac{dN(t)}{dt} = ce^{rt}, N(0) = N_0 \text{ además } N(t_1) = N_1 \text{ y } N(t_2) = N_2.$$

La condición inicial nos da $N(t) = N_0 e^{rt}$, luego aplicando las otras condiciones

$$N(t_1) = N_1 = N_0 e^{rt_1} \text{ y } N(t_2) = N_2 = N_0 e^{rt_2},$$

de donde $\left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{\frac{1}{t_1}} = e^r$ y $\left(\frac{N_2}{N_0}\right)^{\frac{1}{t_2}} = e^r$, entonces $\left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{\frac{1}{t_1}} = \left(\frac{N_2}{N_0}\right)^{\frac{1}{t_2}}$.

Por lo tanto

$$\left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{t_2} = \left(\frac{N_2}{N_0}\right)^{t_1}.■$$

4.13 APLICACIÓN A LA ARQUEOLOGÍA

El elemento carbono, que se encuentra presente en todos los compuestos orgánicos, tiene un *isótopo radiactivo*, se conoce como el carbono 14 (^{14}C). Resulta que, el porcentaje de ^{14}C con relación al carbono en los organismos vivos permanece constante y, cuando este muere, el ^{14}C se desintegra en la forma que hemos estudiado. Este hecho es muy importante, en vista que, si además cuando ^{14}C ha perdido una parte de un organismo, entonces es posible calcular el tiempo transcurrido a partir de su muerte. Para esto, solo debemos conocer la *vida media*

del ^{14}C, trabajos experimentales señalan que la vida media aproximada del ^{14}C es de unos 5 600 años, (Bard et al., 1990).

> Alrededor de 1950, el químico Willard Libby (premio Nobel de Química en 1960), inventó un método que emplea el carbono radioactivo para determinar las edades aproximadas de los fósiles. El método se basa en que el isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. La razón de la cantidad de C-14 al carbono ordinario en la atmósfera es constante, y en consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivos es igual que la de la atmósfera. Cuando muere un organismo la absorción del C-14 sea por respiración o alimentación cesa. Así se compara la cantidad proporcional de C-14 presente y que el periodo medio del C-14 es aproximadamente de 5 600 años, (Dennis, 1988)

Ejemplo 23. Durante unas excavaciones se encontraron huesos fósiles de un animal, se analizaron y se detectó que cada hueso contenía 1/50 parte del ^{14}C radiactivo. Calcule la antigüedad aproximada de los huesos encontrados.

Solución. Sea $N(t)$ la cantidad presentes de ^{14}C en cada hueso al cabo de t años y que N_0 es la cantidad original inicial de dicha sustancia radiactiva en cada hueso. La ecuación diferencial se

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t), N(0) = N_0 \text{ y } N(5600) = \frac{N_0}{2}$$

cuya solución con valor inicial es $N(t) = N_0 e^{rt}$, y aplicando la vida de ^{14}C debemos calcular el valor r,

$$N(5600) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{5600r} \text{ con } t_m = 5600,$$

de donde $r = \frac{-ln2}{5600} = -0{,}000123776$, luego la solución de aproximación es

$$N(t) = N_0 e^{-0{,}0001123776t},$$

pero se sabe que cada hueso contenía una 1/50 parte de ^{14}C radiactivo, se hace los cálculos para obtener

$$N(t) = \frac{N_0}{50} = N_0 e^{-0{,}000123776t},$$

entonces $t = \frac{ln50}{0{,}000123776} \approx 31\,605.6667$. Por lo tanto, la antigüedad aproximada de los huesos es 31606 años.■

PROBLEMAS 4.7

En cada uno de los problemas se asume que la rapidez de decrecimiento es directamente proporcional a la cantidad presente de sustancia radioactiva.

1. El uranio se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si N_1 y N_2 gramos están presentes en los instantes t_1 y t_2, respectivamente, demuestra que la vida media del uranio es $t_m = \frac{(t_2-t_1)ln2}{lnN_1-lnN_2}$.
2. Obtener la vida media de una sustancia radiactiva que en 10 años se desintegra un 25%.
   R. $t_m \approx 24\ años$, 34 días.
3. La mitad del número original de núcleos radiactivos se ha desintegrado en un periodo de 1 500 años; a) ¿Qué porcentaje de los núcleos radiactivos originales quedará al cabo de 4 500 años?; b) ¿Cuántos años tardará en reducirse a una décima parte el número original de núcleos?
   R. a) 12,5%, b) 4 985 años.
4. Un material radioactivo se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad presente. Si después de una hora se observa que el 10% del material se ha desintegrado. Encuentre la vida media del material.
   R. $t \cong$ 6,6 horas.
5. Se ha observado que el 0,5% de una sustancia radioactiva desaparece en 12 años; a) ¿Cuál es la vida media de dicha sustancia?; b) determine la cantidad que desaparecerá en 1000 años.
   R. a) 1660 años; b) Desaparece 34.144% de dicha sustancia.
6. Un año después de la producción de cierta sustancia radioactiva, había 100 g de ésta y dos años después 75 g; ¿Cuánto había inicialmente? Calcule la vida media de sustancia.
   R. $N_0 = 133.333$ g ; 2 años, 150 días.
7. Un análisis de restos fósiles de un animal demostró que éstos contenían solamente sólo el 6.24% del ^{14}C original. Calcule la antigüedad del cráneo.
   R. 22 412 años, 126 días.
8. Al comienzo se tenía 100 miligramos de una sustancia radioactiva. Después de 6 horas su masa disminuyó en un 3%. Si en un tiempo cualquiera la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia presente, encuentre la cantidad que queda después de 24 horas.
   R. 88.5 mg.

9. Una muestra extraída de un cráneo antiguo contenía solamente una sexta parte del ^{14}C original. Determine la antigüedad del cráneo.

   R. 14 475 años.

10. Sabiendo que la vida media de una sustancia radiactiva es de 1800 años, ¿qué porcentaje habrá al final de 100 años? ¿en cuántos años se tendrá el 10% de la sustancia?

    R. 96.22%; 5 980 años, 270 días.

11. Si el 5% de una sustancia radioactiva se descompone en 50 años, ¿qué porcentaje se tendrá al final de 500 años? ¿Cuál es vida media de esta sustancia?

    R. 59.9%; 675 años, 212 días.

12. El radio se descompone en rayos alfa, suponiendo que la rapidez de descomposición es proporcional a la cantidad presente en cualquier tiempo t y que en 664 años se ha perdido el 25% de la cantidad original, ¿Cuál es la vida media del radio?

    R. $t \cong 1\,600$ años.

4.14 DINÁMICA DE POBLACIÓN MODELO MALTHUS

En esta parte veremos algunos modelos de población para una especie, ponemos énfasis en la ecuación logística. Naturalmente la motivación más importante viene de la biología matemática, por cierto, también de la dinámica de poblaciones. Por cierto, los modelos más sencillos son independientes de la densidad, allí donde el tamaño de población no depende de la tasa de natalidad y mortalidad por individuo.

Malthus* (1798) propuso un modelo de este tipo en el que las tasas de natalidad y mortalidad en cada instante son proporcionales al número de individuos de la población en ese instante. Sea $P(t)$ el número de individuos en el tiempo t, es decir

$$\frac{dP(t)}{dt} = mP(t) - nP(t),$$

donde m y n son respectivamente las tasas de natalidad y mortalidad *per cápita*. El parámetro $r = m - n$ se suele llamar tasa intrínseco de crecimiento, y determina la ecuación

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \qquad (1)$$

donde la constante de proporcionalidad r es la tasa de crecimiento, positiva o negativa. El modelo matemático con r positiva predice que la población crecerá

exponencialmente. Naturalmente que se trata de un modelo lineal para crecimiento de poblaciones, son apropiadas siempre que la población no sea demasiado grande o bien que no se aplique a un futuro distante. Cuando la población es demasiado grande, este modelo no puede ser exacto, debido a que no se toma en cuenta el hecho de que los individuos compiten entre sí por el limitado espacio vital, por recursos naturales, entre otros aspectos. En este, caso se debe ajustar el modelo. En vista de los medios de subsistencia se incrementaban en progresión aritmética, Malthus argumentaba que la Tierra no podría asistir con alimentos a la humanidad, esta teoría tuvo gran impacto en la Sociología del siglo XIX.

Para $r > 0$, el crecimiento exponencial se ajusta mucho a la realidad durante un intervalo de tiempo (con datos reales). Sin embargo, a largo plazo no es un modelo realista, esto es principalmente a la falta de los recursos. Por otro lado, no es estable, no tiene un valor de equilibrio, lo natural es que la tasa de natalidad y mortalidad dependan del tamaño de la población; debe existir un mecanismo de control cuando la población crece demasiado.

Dado que la ecuación es separable la solución general es

$$P(t) = ce^{rt},$$

como es común conocer la población inicial, $P(0) = P_0$, esto permite calcular el valor de la constante c, con $P(0) = P_0 = ce^0$ de donde $c = P_0$, la solución con la población inicial es

$$P(t) = P_0 e^{rt}. \qquad (m_1)$$

En (m_1), si $r > 0$ la población aumenta de tamaño, si $r < 0$ la población disminuye de tamaño. Para calcular la tasa de crecimiento r se requiere conocer la cantidad de la población existente en un tiempo $t_1 > t_0$, digamos que $P(t_1) = P_1$, entonces se cumple $P(t_1) = P_1 = P_0 e^{rt}$, es decir, $\frac{P_1}{P_0} = e^{rt}$ y tomando logaritmo natural se obtiene

$$r = \frac{ln(P_1) - ln(P_0)}{t_1}.$$

En general un problema puede considerar como condiciones iniciales distinto a cero, es decir $P(t_0) = P_0$, sigue siendo un problema con valor inicial,

* El economista británico Thomas Malthus (1766-1834 observó que muchas poblaciones biológicas se incrementan a una tasa proporcional al tamaño de la población. Malthus propuso este modelo después de analizar los datos del censo de los Estados Unidos, que mostraba una duplicación de la población cada cincuenta años.

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \text{ con } P(t_0) = P_0,$$

en este caso la ecuación solución es

$$P(t) = P_0 e^{r(t-t_0)}. \blacksquare \qquad (m_2)$$

Obsérvese que cuando más grande sea r mas rápido es el crecimiento de la población, y que cuando $r < 0$ la población decrece. Para $r = 0$ el tamaño de la población permanece constante, ver figura 4.18.

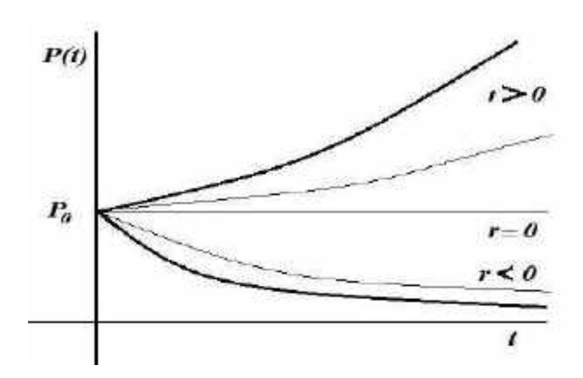


Figura 4.18: Representación gráfico de las exponenciales $P(t) = P_0 e^{rt}$ según la tasa de crecimiento r.

Ejemplo 24. En 1970 se arrojó a un lago 1000 ejemplares de una especie de pez híbrido. En 1977 se estimó que la población de esta especie era de 3 000. Utilizando una ley malthusiana para el crecimiento de la población, calcule la población de estos en el lago en 1990.

Solución. Se tiene $t = 0$ en 1970, es decir, el problema es

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \text{ con } P(0) = 1000,$$

y la solución similar a (m_1), es decir

$$P(t) = 1000e^{rt}.$$

Para encontrar r, aplicamos la condición $P(7) = 3000$ es decir transcurre 7 años desde 1977,

$$3000 = 1000e^{7r},$$

de donde $r = \frac{\ln(3)}{7} \approx 0{,}156$. Con esto la ecuación de estimación queda completa,

$$P(t) = 1000e^{0{,}156t}. \qquad (e_1)$$

Finalmente estimamos la población para 1990 después de $20 = t$ años, aplicamos en la ecuación (e_1),

$$P(20) = 1000e^{0{,}156(20)} = 1000e^{3{,}12} \approx 22\,646.$$

Por tanto, al año 1990 se encuentra aproximadamente unos 22 646 peces. ■

Ejemplo 25. En un cultivo de bacterias se tenían P números de familias. Después de una hora se observaron en el cultivo 500 familias de la bacteria y después de cuatro horas 1500 familias. Encontrar la expresión para el número de familias de la bacteria presentes en el cultivo al tiempo t y el número de familias de la bacteria que había originalmente en el cultivo.

Solución. Sea $P(t)$ el número de familias de la bacteria que hay en t horas. Tenemos que $P(1) = 500$ y $P(4) = 1500$, la velocidad con la que crece el cultivo de bacterias es $\frac{dPt)}{dt}$. Por la ley malthusiana este problema con valores iniciales y se escribe,

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \text{ con } P(1) = 500 \text{ y } P(4) = 1500$$

la solución de la ecuación está dada por

$$P(t) = ce^{rt},$$

considerando las condiciones iniciales se calcula $c = 346{,}68,$ y $r = 0{,}366$. Por tanto, la expresión para obtener el número de familia presentes en un tiempo t es

$$P(t) = 346{,}68e^{0{,}366t}.$$

Finalmente para obtener el número de familia que había originalmente en cultivo se obtiene en $t = 0$, y es $P(0) \approx 347$ familias.■

PROBLEMAS 4.8

1. Suponga que la población de una ciudad crece con una rapidez que es proporcional al número de habitantes en cualquier tiempo. Si la población se triplica en 20 años, ¿En cuántos años se triplicará?
2. En un cultivo de bacterias se tenían P números de familias. Después de una hora se observaron en el cultivo 600 familias de la bacteria y después de tres horas, 1200 familias. Encontrar la expresión para el número de familias de la bacteria presentes en el cultivo al tiempo t y el número de familias de la bacteria que había originalmente en el cultivo.
3. En un cultivo de bacterias se estimó que inicialmente había 150 bacterias y 200 después de una hora. Asumiendo una rapidez de crecimiento proporcional a la cantidad de bacterias presentes, determine: a) la cantidad

de bacterias después de t horas, b) la cantidad de bacterias después de 2 horas, c) El tiempo que debe transcurrir para que la población se triplique.

R. a) $P(t) = 150\exp(0{,}2877t)$, b) $P(2) \approx 267$ bacterias, c) $t \approx 3$horas, 49 minutos, 7 segundos.

4. La población de una pequeña ciudad crece en un instante cualquiera con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes en dicho instante. Su población inicial de 500 aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población dentro de 30 años?

   R. Aproximadamente 760 habitantes.

5. Se sabe que un cultivo de bacterias crece a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Después de una hora se observaron en el cultivo 500 familias de bacterias y después de cinco horas 3 500 familias. Encuentre: a) La expresión para el número de bacterias presentes en el cultivo en un momento t, b) El número de familia de bacterias que había originalmente en el cultivo.

   R. a) $P(t) = 307e^{\left(\frac{ln7}{4}\right)t}$; b) $P(0) = 307$.

6. Una ciudad tenía 2 500 habitantes en 1960 y 30 000 en 1970, asumiendo que la población crece exponencialmente con índice constante, ¿qué población tendrá en el año 2007?

   R. Aproximadamente 58 997 habitantes.

4.15 DINÁMICA DE POBLACIÓN MODELO VERHULST

Este modelo no lineal surge como una observación al modelo de Malthus para controlar otras variables, por ejemplo, el caso en que los individuos compiten entre sí. Entonces hay que agregar un término de competición para el crecimiento de la población y se acerque a la realidad. Una elección apropiada del término competitivo es $-mP^2$, denominada ley logística y se escribe

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) - mP^2(t) \text{ con } r, m > 0. \qquad (b_1)$$

Es claro observar que la modificación es sustituir la constante r por una función de P, es decir $r(P)$, con lo que la ecuación quedaría

$$\frac{dP(t)}{dt} = r(P(t))P(t).$$

Verhulst supuso que $r(P(t)) = r - mP$, de allí se obtiene la ecuación (b_1). En general la constante m resulta ser muy pequeña en comparación con r de manera que, si la población $P(t)$ no es muy grande, entonces el término $-mP^2$ es insignificante comparado con rP. En el caso, si P es grande entonces el término $-mP^2$ debe tomarse en cuenta ya que disminuye la tasa de crecimiento (Edwards, y Penney, 2009).

* El matemático y filólogo belga Pierre F. Verhulst (1804-1849) observó que las limitaciones de espacio, de la comida disponible, o de otros recursos, reducen la tasa de crecimiento, impidiendo el crecimiento exponencial; después de haber leído el trabajo de Malthus, en 1845 publicó su trabajo "*Recherches Mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*" en las *Mémoires de l'Academie*, allí daba cuenta de ese detalle y se conoce como el modelo logístico.

Cuando se escribe en la forma

$$\frac{dP(t)}{dt} = r\left(1 - \frac{m}{r}(P(t)\right)P(t) = r\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)P(t),$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = r\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)P(t) \qquad (b_2)$$

haciendo $M = \frac{r}{m}$. La constante r viene a ser la tasa de crecimiento intrínseco y M es el nivel de población, o capacidad máxima del medio ambiente (máximo valor que puede tener P). El valor de r depende solo de la especie considerada mientras que M depende tanto de la especie como del medio ambiente en donde se desarrolla esta y es el máximo valor en ese ambiente.

Se puede observar que si P es muy pequeño comparado con M, entonces $(1 - \frac{P}{M}) \approx 1$ y la ecuación se parece a la de Malthus. También se puede observar que si P se aproxima a M, entonces $(1 - \frac{P}{M}) \approx 0$, en consecuencia $\frac{dP(t)}{dt} = 0$, lo cual significa que la población $P(t)$ será casi constante.

Solución de la ecuación separable (b_2)

$$\int \frac{dP}{\left(1 - \frac{P}{M}\right)p} = r\int dt + k \ \text{ con } k \text{ constante,}$$

aplicando fracciones parciales e integrando.

$$\int \frac{dP}{P} - \int \frac{\frac{1}{M}}{1 - \frac{P}{M}} = rt + k$$

es decir

$$Ln|P| - ln|M - P| = rt + k$$

donde $P > 0$, $P < M$. Entonces la ecuación solución es $P(t) = \frac{cMe^{rt}}{1+ce^{rt}}$, ahora aplicando la condición inicial $P(0) = P_0$ se obtiene el valor de la constante $c = \frac{P_0}{M-P_0}$ que reemplazando se obtiene la ecuación de estimación de la población,

$$P(t) = \frac{M}{1+\left(\frac{M-P_0}{P_0}\right)e^{-rt}}. \qquad (s_1)$$

En general se puede asumir un tiempo inicial $t = t_0$, es decir $P(t_0) = P_0$, en esta caso se tiene un problema con valor inicial

$$\frac{dP(t)}{dt} = r\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)P(t) \text{ con } P(t_0) = P_0,$$

entonces la solución logística es

$$P(t) = \frac{M}{1+\left(\frac{M-P_0}{P_0}\right)e^{-r(t-t_0)}}. \qquad (s_2)$$

La expresión (s_3) también es válido en el caso en que $P_0 > M$, en este caso hay decrecimiento. En general en el modelo de Verhults, en la curva logística se puede hacer notar que para la constante $r > 0$ y valor grande de t, la curva logística tiende hacia el valor M para cualquier valor de la población inicial, figura 4.19.

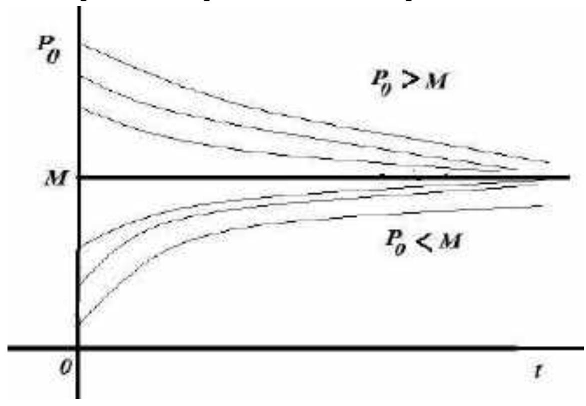


Figura 4.19. Curva logística. Para $P_0 < M$, los valores de P crecen hacia M, para $P_0 > M$, los valores de P decrecen hacia M.

Observación. Es bueno observar cuando se estudia poblaciones humanas, el modelo logístico no es muy preciso; ya en no considera factores sustanciales que intervienen (migraciones, enfermedades, entre otras variables); pero cuando se trata de poblaciones de bacterias los cálculos se acercan mucho a este modelo. Por cierto, la solución es única. Si $P_0 = M$ entonces la solución del modelo logístico es la función constante $P(t) = M$, que resulta de aplicar límite

$$\lim_{P_0 \to M} \frac{M}{1+\left(\frac{M-P_0}{P_0}\right)e^{-r(t-t_0)}} = M.$$

Ejemplo 26. La población $P(t)$ de una cierta ciudad cumple la ley logística $P'(t) = \frac{1}{100}P(t) - \frac{1}{10^8}P^2(t)$, donde el tiempo se mide en años. Asumiendo que la población de esta ciudad es 100 000 en 1980, determine: a) La población como una función del tiempo, b) la población en el año 2018, c) El año en que se triplicará la población de 1980, d) el comportamiento de la población cuando el tiempo crece sin límite.

Solución. Se trata de un problema de valor inicial

$$P'(t) = \frac{1}{100}P(t) - \frac{1}{10^8}P^2(t)\,, \quad P(1980) = 100\,000.$$

Se trata de una ecuación de variable separable

$$\frac{dP}{P(\frac{1}{100} - \frac{1}{10^8}P)} = dt,$$

integrando resulta $10^2 lnP - 10^2 ln(1 - 10^{-6}P) = t + k$, donde $P > 0$ y $1 - 10^{-6}P > 0$, es decir $0 < P < 10^6$. Despejando $P(t)$ se obtiene el modelo en función del tiempo

$$P(t) = \frac{k_1 e^{\frac{1}{100}t}}{1 + k_1 10^{-6} e^{\frac{1}{100}t}} \quad \text{(acumulando la constante k)} \qquad (v_1)$$

hallamos la constante k_1 usando la condición inicial $P(1980) = 100\,000$ en (v_1), resulta $k_1 = \frac{10^6}{9}e^{-19.8}$, reemplazando el valor de la constante en (v_1) se obtiene

$$P(t) = \frac{10^6}{1 + 9e^{19.8 - 0.01t}} \quad \text{para } t > 1980. \qquad (v_2)$$

b) La población en el año 2018 se calcula aplicando en (v_2)

$$P(2018) = \frac{10^6}{1 + 9e^{-0.38}} \approx 139767.23,$$

es decir, en el año 2018 se tendrá aproximadamente 139767 habitantes.

c) Para encontrar en año en que se triplicará la población de 1980, buscamos el valor de t que cumpla

$$P(t) = 3(10)^5$$

$$3(10)^5 = \frac{10^6}{1 + 9e^{19{,}8 - \frac{1}{100}t}} \text{ es decir } \frac{7}{27} = e^{19{,}8 - \frac{t}{100}}.$$

Tomando logaritmo natural $19{,}8 - \frac{t}{100} = ln\left(\frac{7}{27}\right)$ se obtiene $t \approx 2115$. Por tanto, para 2115 tendremos triplicada la población de 1980.

d) Decir que el tiempo es grande, es tomar limite

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \frac{10^6}{1 + 9e^{19{,}8 - \frac{1}{100}t}} = 10^6,$$

por tanto, conforme pasan los año la población de esta ciudad se estabilizará en un millón de habitantes.■

Ejemplo 27. Supongamos que un estudiante portador de un virus de gripe, regresa a un campus universitario, aislado, que tiene 1000 estudiantes. Asumiendo que la rapidez con que el virus se propaga, es proporcional no sólo a los estudiantes contagiados, sino también, al número de estudiantes no contagiados. Determine el número de estudiantes contagiados después de 8 días, si además se observa que después de 3 días ya eran 40 contagiados.

Solución. Este es un modelo logístico para la propagación de una infección o un rumor en una población fija. Sea $P(t)$ el número de estudiantes contagiados en t días, entonces $1000 - P(t)$ representa el número de estudiantes no contagiados y la rapidez o velocidad de propagación con la que aumenta en número de contagiados es $\frac{dP(t)}{dt}$, por tanto se cumple que,

$$\frac{dP(t)}{dt} \text{ es proporcional a } \big(1000 - P(t)\big)P(t).$$

Es un problema con valores iniciales

$$\frac{dP(t)}{dt} = r\big(1000 - P(t)\big)P(t) = 1000r\left(1 - \frac{P(t)}{1000}\right)P(t)$$
$$P(1) = 1 \text{ y } P(3) = 40.$$

Se trata de una ecuación logística con $M = 1000$ y $\bar{r} = 1000r$; reemplazando en la ecuación solución (s_1)

$$P(t) = \frac{1000}{1+\left(\frac{1000-1}{1}\right)e^{-1000rt}} = \frac{1000}{1+999e^{-1000rt}}\ . \qquad (1)$$

Aplicando la condición inicial $P(3) = 40$ para calcular r, y aplicamos en (1) resulta $e^{-3000r} = \frac{8}{333}$, y tomando logaritmo natural $r = \frac{ln\left(\frac{8}{333}\right)}{-3000} \approx 0{,}0012429$, por tanto la ecuación de estimación queda así,

$$P(t) = \frac{1000}{1+999e^{-1{,}2449t}}. \qquad (2)$$

Finalmente el número de infectados en 8 días será $P(8) = \frac{1000}{1+999e^{-1{,}2449(8)}} \approx 954{,}887$. Es decir, 955 estudiantes han sido contagiados, por lo que se observa la propagación es bastante rápido.■

Ejemplo 28. Usando un modelo logístico con capacidad sustentable $M = 100x10^9$, una población mundial (humana) de $5x10^9$ en 1986 y una razón de crecimiento de 2% anual, hacer una predicción mundial para el año 2018. ¿Cuándo será esta población de $32x10^9$? Los datos provistos son aproximados de los datos en realidad.

Solución. Tenemos los datos $M_{max} = 100x10^9$ y $M_0 = 5x10^9$ (en miles de millones de habitantes del planeta) y $r = 0{,}02$ (al 2% tasa de crecimiento). En general la solución de la ecuación diferencial es

$$P(t) = \frac{M}{1+\left(\frac{M-P_0}{P_0}\right)e^{-rt}} \qquad (1)$$

reemplazando los datos en (1) se obtiene $P(t) = \frac{100x10^9}{1+19e^{-0{,}02t}}$ que ahora en año $t = 32$ se obtiene $P(32) = \frac{100x10^9}{1+19e^{-0{,}02(32)}} = \frac{100x10^9}{1+19e^{-0{,}64}} \approx 9\,075\,599\,330$ habitantes.

Por otro lado, la población será de $32x10^9$ en el tiempo t_1 que calculamos por

$$P(t_1) = 32x10^9 = \frac{100x10^9}{1+19e^{-0{,}02t_1}}$$

se reduce a $e^{-0{,}02t} = \frac{17}{152}$, tomando logaritmo natural en ambos miembros se obtiene

$$t_1 = \frac{ln\left(\frac{17}{152}\right)}{-0{,}02} \approx 109{,}5334,$$

esto es a mediados del año 2095. ■

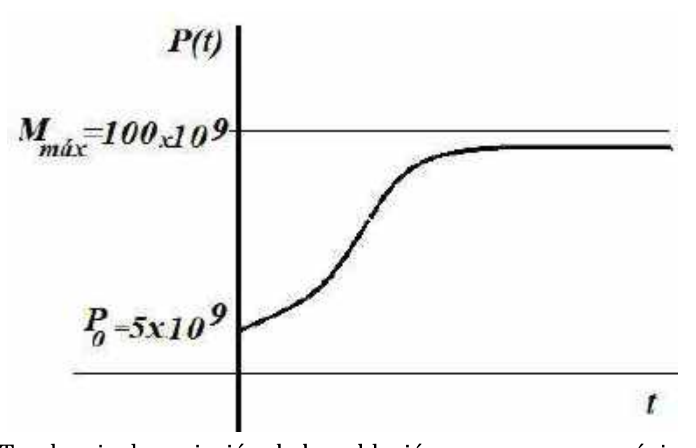


Figura 4.20: Tendencia de variación de la población, se acerca a su máximo permitido.

PROBLEMA 4.9

1. La población $P(t)$ de una cierta ciudad cumple la ley logística $P'(t) = 10^{-2}P(t) - 10^{-8}P^2(t)$, donde el tiempo se mide en años. Asumiendo que la población de esta ciudad es 100 000 en 1980, determine: a) La población como una función del tiempo, b) la población en el año 2019, c) El año en que se

duplicará la población de 1980, d) el comportamiento de la población cuando el tiempo crece sin límite.

2. Un estudiante portador de un virus de gripe o influenza regresa a un local universitario aislado que tiene 1 500 estudiantes. Si se supone que la rapidez con que el virus se propaga es proporcional no sólo al número x de estudiantes contagiados, sino también al número de alumnos no contagiados. Determine el número de estudiantes contagiados luego de 8 días, si además se observa que después de 5 días habían 60 estudiantes contagiados, $x(5) = 60$.
3. El número de personas $N(t)$ de un cierto barrio que verán cierto aviso publicitario se rige por la ecuación logística. Inicialmente $N(0) = 400$ y se observa que $N(1) = 800$. Si se predice que el número límite de personas de la comunidad que verán el aviso es 40 000, determine $N(t)$ en un instante cualquiera.
4. La población $P(t)$ de un barrio pobre de una gran ciudad en un instante cualquiera se rige por el problema de valor inicial $\frac{dP}{dt} = P(10^{-2} - 10^{-8}P)$, $P(0) = 4\,000$, donde t se mide en meses, ¿Cuál es el valor límite de la población? ¿en qué momento será la población igual a la mitad del valor límite?
5. Resuelve la ecuación $\frac{dP}{dt} = P(a - bLnP)$.

4.16 EL MODELO DE BERTALANFFY

En los años 50 del siglo XX, el biólogo austriaco L. von Bertalanffy (1901-1972) desarrolló un modelo para la talla de un individuo en función de su edad, que se utiliza con frecuencia para predecir el tamaño de los peces.

Sea $L(t)$ la longitud del individuo en la edad t y sea A la talla máxima de la especie, es decir la talla máxima que puede alcanzar un pez adulto. La ley de crecimiento señala que la velocidad de crecimiento es directamente proporcional a la diferencia entre la longitud actual y la longitud de máxima permisible, es decir,

$$\frac{dL(t)}{dt} \text{ es proporcional a } (A - L(t))$$

lo que se escribe como

$$\frac{dL(t)}{dt} = r(A - L(t)),$$

siendo $r > 0$, la constante de proporcionalidad o tasa de crecimiento intrínseca, propia de cada especie. Ahora si en el momento inicial, $t = 0$, la longitud del

individuo es L_0 que varía en $0 < L_0 < A$, entonces $L(0) = L_0$; y setrata de una ecuación diferencial con valor inicial,

$$\frac{dL(t)}{dt} = r(A - L(t)) \;\; y \; L(0) = L_0 \qquad \text{(b}_1\text{)}$$

como la diferencia la entre la longitud actual y la longitud máxima alcanzada disminuye con el tiempo, la velocidad de crecimiento disminuye con el tiempo, significa que los ejemplares de peces de menor edad crecen a mayor velocidad que los de mayor edad. En este modelo, la velocidad de crecimiento es siempre positiva. Esto significa que los peces crecen durante toda su vida, que lo que ocurre en la realidad.

Al ser la ecuación (b_1) de variable separable se puede integrar con facilidad,

$$\int \frac{1}{A-L} dL = \int r dt + k \, ,$$

de donde, la solución general es $L(t) = A + ce^{-rt}$, con c constante arbitraria. Imponiendo la condición inicial, $L(0) = L_0$, se obtiene la solución

$$L(t) = A + (L_0 - A)e^{-rt}. \qquad \text{(b}_2\text{)}$$

Se puede observar que cuando el tiempo es bastante grande, $\lim_{t \to +\infty} (t) = A$, significa que la talla de los peces conforme pasa el tiempo tiende hacia A, pero no lo alcanzará, ya que la recta $L = A$ es un asíntota horizontal de la solución, figura 4.21. Además, no tiene un punto de inflexión, entonces la gráfica es cóncava hacia abajo.

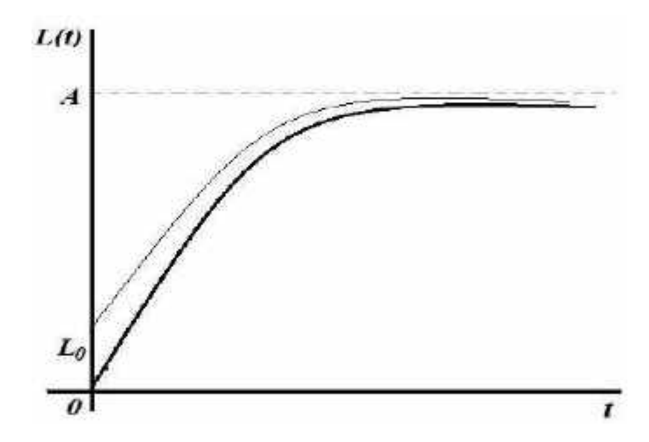


Figura 4.21: Representación gráfica de la solución modelo Bertalanffi.

Ejemplo 29. Sea $L(t)$ la longitud (en centímetros) de un pez en el tiempo t, medido en meses. Se asume que el pez crece de acuerdo con la siguiente ley (de Bertalanffy),

$$\frac{dL(t)}{dt} = r(36 - L(t)) \ y \ L(0) = 1.$$

Sabiendo que, a la edad de 4 meses el pez mide 10 centímetros; a) Determine la constante de crecimiento; b) Calcule la longitud del pez a los 10 meses; c) Dar una interpretación de la dinámica en crecimiento de pez.

Solución. Aquí $A = 36$ y $L_0 = 1$, al ser un modelo Bertalanffy, la solución de la ecuación diferencial según (b_2) es

$$L(t) = 36 - 35e^{-rt}. \qquad (b_3)$$

Para determinar el valor de r es necesario utilizar la información $L(4) = 10$, en (b_3) tenemos $10 = 36 - 35e^{-4r}$, es decir $r = -\frac{1}{4} ln\left(\frac{26}{35}\right) \approx 0{,}07431$; una vez conocido este valor tenemos la ecuación

$$L(t) = 36 - 35e^{-0{,}07431t}.$$

Estimamos en el tiempo 10 meses $t = 10$ para calcular la longitud,

$$L(10) = 36 - 35e^{-0{,}07431(10)} \approx 19{,}3 \text{ cm}.$$

Por último, es obvio que para tiempo grande ($t \to +\infty$) la longitud tiende a 36 cm; en la gráfica se observa que el pez sigue creciendo, pero cada vez a menor velocidad, y su longitud tiende a acercarse al valor 36, aunque nunca llegará a él.

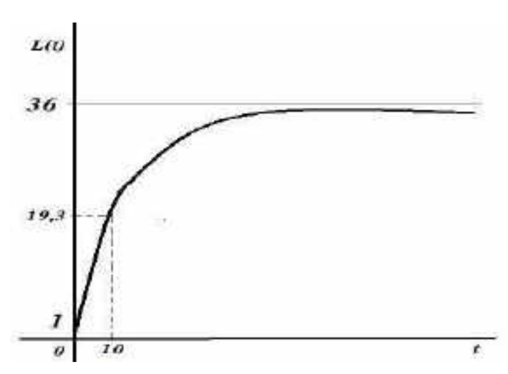


Figura 4.22: Curva de crecimiento del pez.

4.17 DINÁMICA DE EPIDEMIAS

La velocidad de propagación de una epidemia es proporcional al número de personas infectadas multiplicado por el número de personas no infectadas. Si

denotamos por $I(t)$ el número de infectados en el tiempo t y por P la población total, entonces la dinámica de la infección viene por la ecuación diferencial

$$\frac{dI(t)}{dt} = rI(t)(P - I(t)), \qquad (e_1)$$

donde $r > 0$ es el coeficiente de proporcionalidad. La ecuación diferencial (e_1) es de variable separable, integrando $\int \frac{1}{I(P-I)} dI = r \int dt + k$, y la solución general es

$$I(t) = \frac{P}{1+ce^{-rPt}}. \qquad (e_2)$$

Ahora si se conoce el número de habitantes inicialmente $I(0) = P$ en (e_2) hallamos el valor de constante $c = \frac{P-P_0}{P_0}$, la solución al problema de valor inicial está dado por

$$I(t) = \frac{P}{1+\left(\frac{P-P_0}{P_0}\right)e^{-rPt}}. \qquad (e_3)$$

Ejemplo 30. En una población de 10 2000 habitantes se detectó una enfermedad que afecta inicialmente a 30 personas. Al cabo de cuatro días, se observa que son 420 las personas afectadas. Calcular el número de personas enfermas que habrá pasados los 15 días.

Solución. Es un problema con valores iniciales dados por,

$$\frac{dI(t)}{dt} = rI(t)(P - I(t)),\ I(0) = 30,\ I(4) = 420,$$

con la condición inicial $I(0) = 30$, hallamos c dado, $P = 10\,200$ y $P_0 = 30$, la ecuación (e_3) queda,

$$I(t) = \frac{10\,200}{1+339e^{-10\,200rt}} = .$$

Para hallar el coeficiente de proporcionalidad aplicamos la condición $I(4) = 420$, es decir

$$420 = \frac{10\,200}{1+339e^{-10\,200r(4)}} = \frac{10\,200}{1+339e^{-40\,800r}},$$

despejando r tomando logaritmo en ambos miembros se obtiene $r = \frac{1}{-40\,800} ln\left(\frac{163}{2373}\right)$, aproximadamente $r \approx 0{,}00006564$, con esto la solución para hacer estimaciones del número de infectados,

$$I(t) = \frac{10\,200}{1+339e^{-0{,}669528t}},$$

aquí estimamos al cabo de 15 días el número de infectados $I(15)$,

$$I(15) = \frac{10\,200}{1+339e^{-0{,}669528(15)}} \approx 10\,051{,}79.$$

Es decir, en 15 días habrá aproximadamente 10 052 personas infectadas.

PROBLEMAS 4.10

1. En una granja donde 40000 aves, existe un pollo contagiado con la gripe aviar. Asumiendo que la rapidez de contagio es directamente proporcional tanto al número de aves contagiados como al número de no contagiados, siendo la constante de proporcionalidad $r = 4x20^{-5}$. Calcular en cuanto tiempo un 75% de las aves de la granja quedaría infectados.

   R. Aproximadamente 7.3 días.

4.18 CRECIMIENTO DE TUMORES

Estudios experimentales señalan que ciertas células como las bacterias, se reproducen conforme a una tasa proporcional al volumen de las células en ese instante. Si denotamos por $x(t)$ el volumen de las células en el tiempo t; se tiene

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\ ,$$

siendo r la constante de proporción, $r > 0$. El problema de valor inicial siendo x_0 el volumen de las células en tiempo inicial t_0,

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t),\ x(t_0) = x_0, \quad \text{(a)}$$

la solución de (a) es

$$x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)} \qquad \text{(b)}$$

Esta solución (b) indica que las soluciones crecen exponencialmente conforme pasa el tiempo, ¿cómo aumenta? Veamos en tiempo en que se duplica,

$$2x_0 = x_0 e^{r(t-t_0)},$$

de donde $t - t_0 = \frac{Ln(x_0)}{r}$. Esto quiere decir, que el volumen celular se duplica permanentemente en cada intervalo de tiempo $[t_0, t]$ cuya magnitud es $\frac{Ln(x_0)}{r}$.

Existen resultados de investigaciones que concluyen que los datos para muchos tumores se ajustan, durante un desarrollo a casi 1 000 veces el volumen inicial. Este modelo tiene que ver con la Ley de Gompertz, esta ley tiene cuenta el hecho de que el crecimiento de un tumor avascular es rápido en sus inicios, y más lento a medida que pasa el tiempo.

Problema. El crecimiento de ciertos tumores sólidos avasculares puede describirse mediante la siguiente ley

$$\begin{cases} x'(t) = re^{-\lambda t}x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \qquad (t_1)$$

donde $x(t)$ expresa el número de células tumorales en el instante t; $r > 0$ y $\lambda > 0$ son parámetros de cada tumor y el tejido en el que se desarrolla; a) resolver el problema de valor inicial, b) calcular $\lim_{t\to+\infty} x(t)$.

Solución. La ecuación diferencial dado en (t_1) es de variable separable, entonces integramos

$$\int \frac{1}{x} dx = r \int e^{-\lambda t}\, dt + c,$$

se obtiene como solución general

$$x(t) = ce^{-\frac{r}{\lambda}e^{-\lambda t}}, \qquad (t_2)$$

donde c es una constante arbitraria.

Imponiendo la condición inicial $x(0) = x_0$ en (t_2) se obtiene $x_0 = ce^{-\frac{r}{\lambda}}$, así la constante se expresa por $c = x_0 e^{\frac{r}{\lambda}}$, por lo tanto, reemplazando en (t_2) se obtiene

$$x(t) = x_0 e^{\frac{r}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})} \qquad \text{(c)}$$

cuando t es grande, $t \to +\infty$ se tiene $e^{-\lambda t} \to 0$; es decir en (t_3) tomamos límite

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} x_0 e^{\frac{r}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})} = x_0 e^{\frac{r}{\lambda}}.$$

El resultado (c) señala que hay un lento crecimiento del tumor y que su volumen tiende a $x_0 e^{\frac{r}{\lambda}}$.

PROBLEMA 4.11

1. Una cierta sustancia cumple la ley de crecimiento exponencial (c). Pruebe que la gráfica de $Ln(x(t))$ es una recta.
2. Un tumor canceroso satisface la ecuación (c) inicialmente, cuando, cuando contenía 10^4 células, el tumor crecía a una tasa de 20% por unidad de tiempo. El valor numérico de la constante de retardo es 0,04. ¿Cuál es el valor límite de las células en este tumor?

4.19 APLICACIÓN EN ECONOMIA: EL MODELO SOLOW

El modelo económico dinámico de Solow* (Solow, 1956) marca el inicio de la moderna teoría de crecimiento económico. Su base responde a las hipótesis.

La mano de obra, L, crece a una tasa constante n,

$$\frac{dL}{dt} = nL$$

es decir

$$\frac{\frac{dL}{dt}}{L} = n.$$

El ahorro $S = sY$ se invierte completamente en la formación de capital, $I = \frac{dK}{dt} + \lambda K$, donde Y describe el *output* en la economía (es un bien o servicio que ha sido obtenido tras un proceso productivo), K capital y $\lambda, s \in \langle 0, 1]$ son constantes (λ es la tasa de depreciación del capital),

$$sY = \frac{dK}{dt} + \lambda K.$$

La función de producción $f(K.L)$ depende de la mano de obra L y del capital K en el sentido macro,

$$Y = f(K.L)$$

con $K > 0, L > 0$.

*Robert Merton Solow nacido en 1924, economista estadounidense, formuló la teoría del crecimiento económico, macroeconomía y economía de los recursos naturales. Su modelo es dinámico, premio nobel de economía 1987 por sus aportes en el campo de la teoría sobre el crecimiento económico. Su modelo matemático adopta la forma de una ecuación diferencial, que muestra cómo el incremento del stock de capitales ocasiona un aumento de la producción per cápita.

Problema: Encuentre la ecuación que describe la evolución del capital en el tiempo y la solución correspondiente a dicha ecuación. ¿La solución del capital per cápita converge a algún valor en el largo plazo? Se asume que:

- $\frac{\partial f}{\partial K} > 0,\ \frac{\partial f}{\partial L} > 0$: productos marginales positivas,
- $\frac{\partial f}{\partial K} < 0,\ \frac{\partial f}{\partial L} < 0$: retorno decreciente para cada factor.

La función de producción $f(K.L)$ se considera homogénea de grado uno, luego $Y = f(K.L)$ se puede escribir,

$$Y = Lf(\frac{K}{L}, 1),$$

ahora si hacemos $r = \frac{K}{L}$ se escribe

$$Y = L\varphi(r)\ . \qquad (s_1)$$

Por otro lado, la hipótesis de Solow dice

$$\frac{dK}{dt} = sY \qquad (s_2)$$

donde s es la constante propensión marginal al ahorro.

$$\frac{dL}{dt} = nL,\ n > 0 \qquad (s_3)$$

y n es llamada tasa de crecimiento de la mano de obra, aquí (s_3) señala la fuerza crece exponencial. Esto se puede ver resolviendo la ecuación diferencial,

$$\frac{dL}{L} = ndt,$$

de donde $L(t) = Ce^{nt}$.

La idea es construir un modelo completo a parir de las ecuaciones (s_1), (s_2) y (s_3). Reemplazando (s_1) en (s_2),

$$\frac{dK}{dt} = sL\varphi(r) \qquad (s_4)$$

con $r = \frac{K}{L}$ entonces $K = rL$ que derivando se obtiene

$$\frac{dK}{dt} = L\frac{dr}{dt} + r\frac{dL}{dt}$$

sustituyendo (s_3) en esta ecuación

$$\frac{dK}{dt} = L\frac{dr}{dt} + nLr \qquad (s_5)$$

igualando (s_4) y (s_5)

$$sL\varphi(r) = L\frac{dr}{dt} + nLr$$

es decir

$$\frac{dr}{dt} + nr = s\varphi(r). \qquad (s_6)$$

Un ejemplo típico es la función de producción de Cobb-Douglas* (Bellod, 2011),

$$Y = f(K,L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}, \ \alpha \in \langle 0,1 \rangle,$$

entonces el modelo se traduce en

$$Y = L\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = Lr^{\alpha}, \ \ r = \frac{K}{L}$$

en este caso, se asume $\varphi(r) = r^{\alpha}$, luego la ecuación (s_6) se escribe como

$$\frac{dr}{dt} + nr = sr^{\alpha}. \qquad (s_7)$$

*La función de producción de Cobb-Douglas es quizás la función de producción más utilizada en economía. La formulación se debe al profesor de economía Paul Douglas y el matemático Charles Cobb. En 1927, Douglas descubrió algo interesante: la distribución de la renta entre trabajo y capital en EEUU, era casi constante con el paso del tiempo. Fijaba que, el trabajo se llevaba el 70% de las rentas y el capital el 30%. Entonces acudió a su amigo matemático Cobb para ver si existía alguna función que mantenía las participaciones constantes en los factores. De allí la función $Y = Ak^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde $0 < \alpha < 1$; Y: Producción, A: progreso técnico exógeno, K: Stock de capital, L: número de empleados en una economía.

De manera que la ecuación diferencial del capital per cápita (s7) es del tipo Bernoulli. Para resolver esta ecuación hacemos $z = r^{1-\alpha}$, donde $\frac{dz}{dr} = (1 - \alpha)r^{-\alpha}\frac{dr}{dt}$, que luego multiplicamos en la ecuación (s7) por $(1-\alpha)r^{-\alpha}$ y se obtiene

$$(1-\alpha)r^{-\alpha}\frac{dr}{dt} + (1-\alpha)nr^{1-\alpha} = (1-\alpha)s$$

es decir

$$\frac{dz}{dt} + (1-\alpha)nz = (1-\alpha)s\,, \qquad \text{(s8)}$$

lo cual es una ecuación lineal en z con factor integrante $u(t) = \exp(\int(1-\alpha)ndt) = \exp((1-\alpha)nt)$, y multiplicando (s8) por $u(t)$, se obtiene,

$$e^{(1-\alpha)nt}\frac{dz}{dt} + (1-\alpha)nze^{(1-\alpha)nt} = (1-\alpha)se^{(1-\alpha)nt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{(1-\alpha)nt}z\right) = (1-\alpha)se^{(1-\alpha)nt},$$

integrando en ambos miembros

$$e^{(1-\alpha)nt}z = \int\left((1-\alpha)se^{(1-\alpha)nt}\right)dt + c$$

$$= \frac{s}{n}e^{(1-\alpha)nt} + c.$$

Por tanto, la solución para z es

$$z(t) = \frac{s}{n} + ce^{-(1-\alpha)nt},$$

ahora deshaciendo cambio $z = r^{1-\alpha}$, entonces la solución general se escribe

$$r(t) = \left(\frac{s}{n} + ce^{-(1-\alpha)nt}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad \text{(s9)}$$

Consideremos la condición inicial $r(0) = r_0$ donde r_0 es el capital per cápita para un tiempo $t = 0$, se obtiene

$$r(0) = r_0 = \left(\frac{s}{n} + c\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

así $c = r_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n}$.

Por tanto, la solución del problema con valor inicial

$$r(t) = \left(\frac{s}{n} + \left(r_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n}\right)e^{-(1-\alpha)nt}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \blacksquare$$

Se puede observar que cuando el tiempo es bastante grande, $t \to \infty$, se obtiene que $r(t)$ tiende a $\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, se explica como que el equilibrio varía directamente con la propensión marginal al ahorro e inversamente con la tasa de crecimiento de mano de obra n. En conclusión a largo plazo, tenemos que $\lim_{t\to+\infty} r(t) = r_e$ como el capital de estado estacionario,

$$r_e = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Problema. En la función de producción de Cobb-Douglas, considere 0,1 como tasa de crecimiento de la población, 0,20 como tasa de ahorro y $\alpha = 0{,}2$. Halle la solución del capital de estado de equilibrio.
Solución. La función de producción de Cobb-Douglas es

$$Y = L\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = Lr^{\alpha} \text{ donde } r = \frac{K}{L}$$

donde se dan las hipótesis $n = 0{,}1; s = 0{,}20$ y $\alpha = 0{,}2$. Sustituyendo los valores dados en la ecuación diferencial (s7) resulta,

$$\frac{dr}{dt} + 01, r = 0{,}2r^{0{,}2}.$$

Así resulta una ecuación de tipo Bernoulli, siguiendo el modelo de solución para este tipo de ecuación (ver (s9)) resulta como solución general

$$r(t) = (2 + ce^{-0{,}08t})^{1{,}25}.$$

Calculamos la expresión en el equilibrio (cuando $t \to +\infty$) y es $r_e = (2)^{1{,}25}$. ■

4.20 LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

Si un objeto o cuerpo que tiene una temperatura inicial T_0 se deposita en un medio ambiente que se mantiene a una temperatura constante T_m, siendo $T_0 \neq T_m$, nuestra observación del diario quehacer nos confirma que conforme pasa el tiempo, la temperatura del objeto tiende a ser igual al del medio que los rodea.

Entonces bajo ciertas condiciones, la velocidad a la que cambia la temperatura de un objeto es directamente proporcional a la diferencia de la temperatura del objeto en ese instante t, esto es, para obtener un modelo aplicamos la Ley de enfriamiento de Newton, así:

$$\frac{dT(t)}{dt} \text{ es proporcional a } (T(t) - t_m),$$

es decir

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - t_m), \qquad \text{(t1)}$$

donde T_m es la temperatura del medio (constante) y k es la constante de proporcionalidad, propia del objeto. Si en el instante inicial, $t = 0$, la temperatura toma el valor T_0, se tiene $T(0) = T_0$, por lo tanto la temperatura del objeto en cualquier instante posterior, $T(t)$, viene de un problema de ecuaciones diferenciales con valor inicial,

$$\begin{cases} \frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{cases} . \qquad (t_2)$$

Si analizamos la ecuación (t_1), puede ocurrir un enfriamiento: Si $T_0 > T_m$, esto es $T(t) > T_m$, en el objeto está ocurriendo un enfriamiento, esto obliga a que $T(t)$ decrece y que $T(t) - T_m > 0$; entonces como $\frac{dT(t)}{dt} < 0$ y $T(t) - T_m > 0$, de (t_2) se deduce que $k < 0$; es decir la constante de proporcionalidad es negativa.

Similarmente, puede ocurrir un calentamiento: Si $T_0 < T_m$, también $T(t) < T_m$, en el objeto está ocurriendo un calentamiento, esto obliga a que $T(t)$ crece y que $T(t) - T_m < 0$; por lo tanto $\frac{dT(t)}{dt} > 0$ y $T(t) - T_m < 0$, de (t_2) se deduce que $k < 0$; es decir nuevamente la constante de proporcionalidad es negativa. Con estas observaciones se confirma que la ecuación diferencial (t_2), tiene sentido, sea para enfriamiento o calentamiento; siempre es $k < 0$.

Resolvemos la ecuación diferencial (t_2) al ser una ecuación de variable separable, integrando, $\int \frac{dT}{T - T_m} = k \int dt + c_1$, de donde $ln|T - T_m| = kt + c_1$; es decir,

$$T(t) = T_m + ce^{kt}; c \in \mathbb{R} . \qquad (t_3)$$

La solución particular que cumple $T(0) = T_0$ aplicados en (t_3) es

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt} . \qquad (t_4)$$

Se puede observar que para t bastante grande; $\lim_{t \to +\infty} T(t) = T_m$. Es decir, cualquiera sea su temperatura inicial, conforme transcurre el tiempo, la temperatura del objeto tiende a igualarse con la temperatura del medio, gráficamente interpretado dice que tiene una asíntota horizontal en $T = t_m$. La figura 4.23 representa las soluciones del problema cuando se da varios valores del dato inicial T_0; ($T_0 < T_m$; $T_0 > T_m$); naturalmente, la temperatura del objeto cambia más rápidamente cuando mayor es la diferencia entre la temperatura inicial del objeto y la temperatura del medio.

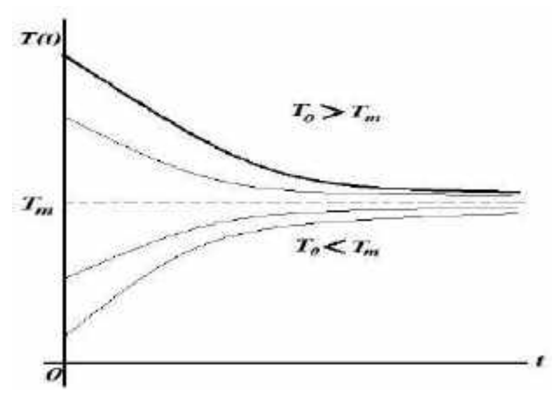


Figura 4.23: Representación gráfica de la ecuación diferencial (t_2), según casos.

Ejemplo 31. Cuando un cuerpo absorbe calor del medio que lo rodea sigue la Ley de Newton. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es 18 ^{0}C, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Calcular el tiempo que dicha barra tardará en alcanzar los 85 ^{0}C, si e sabe que su temperatura aumenta 2 ^{0}C en un segundo. ¿Cuánto tardará la barra en alcanzar los 80 ^{0}C?

Solución. Tenemos la temperatura del medio $T_m = 100$ (agua hirviendo), mientras que la temperatura inicial es $T(0) = 18$. Por tanto, se trata de un problema con valor inicial

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - 100), \ T(0) = 18.$$

Conforme a la solución dada en (t_4) se escribe $T(t) = 100 + (18 - 100)e^{kt}$, es decir

$$T(t) = 100 - 82e^{kt}. \qquad (1)$$

Por otro lado, la temperatura aumenta en 2 ^{0}C en 1 segundo, encontramos que

$$T(1) = 18 + 2 = 20,$$

así, en (1) se obtiene $T(1) = 20 = 100 - 82e^{k(1)}$, es decir $e^k = \frac{40}{41}$, luego $k = ln\left(\frac{40}{41}\right)$.

Por lo tanto, la temperatura en cualquier instante t habiendo reemplazado el valor de la constante es

$$T(t) = 100 - 82e^{tln\left(\frac{40}{41}\right)}. \qquad (2)$$

Para calcular el tiempo que tarde la barra en alcanzar la ecuación $T(t) = 85$ ^{0}C usamos la ecuación de estimación (2), así, $85 = 100 - 82e^{tln\left(\frac{40}{41}\right)}$ de donde haciendo estimaciones

$$t = \frac{ln\left(\frac{15}{82}\right)}{ln\left(\frac{40}{41}\right)} \approx 68{,}79 \text{ s.}$$

Similarmente, para calcular el tiempo que tarda en alcanzar 80 ^{0}C se resuelve la ecuación $T(t) = 80$ ^{0}C, en (29) y se obtiene $t \approx 57{,}14\ s$.

Ejemplo 32. Un objeto que tiene una temperatura de 65 ^{0}F es depositado (en el tiempo t = 0) en un lugar donde la temperatura se mantiene a 35 ^{0}F. Transcurrido 3 min, la temperatura del cuerpo ha disminuido a 55 ^{0}F; a) ¿Cuál es la temperatura del cuerpo después de 5 min?, b) ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que el cuerpo tenga 45 ^{0}F?

Solución. Considerando que $T(t)$ es la temperatura del objeto en ^{0}F, luego de t minutos, entonces la ecuación diferencial a resolver es

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - 35),\ T(0) = 65 \text{ y } T(3) = 55,$$

la solución de esta ecuación es conforme a la ecuación (t_4),

$$T(t) = 35 + (65 - 35)e^{kt} = 35 + 30e^{kt},$$

entonces aquí aplicamos $T(3) = 55$ y queda $55 = 35 + 30e^{3k}$ de donde

$$k = \frac{1}{3} ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0{,}1352,$$

por tanto, la solución de estimación es

$$T(t) = 35 + 30e^{-0{,}1352t}.$$

Respondiendo a las preguntas:

a) La temperatura del objeto en 5 min, basta calcular $T(5)$,

$$T(5) = 35 + 30e^{-0{,}1352(5)} \approx 50.26\ ^0\text{F}.$$

b) Para hallar el tiempo resolvemos $T(t) = 45$ en la ecuación de estimación,

$$45 = 35 + 30e^{-0{,}1352t},$$

donde $t = \frac{\ln(3)}{0{,}1352} \approx 8.1258\ min$; por lo tanto, el objeto tendrá una temperatura de 45 C después de $t \approx 8$ minutos, 8 segundo.■

Ejemplo 33. Un cuerpo que tiene una temperatura 40 ^{0}F se ubica a las 10:00 horas en un horno que se mantiene a 370 ^{0}F. A las 11:00 horas su temperatura era 120 ^{0}F. ¿A qué hora estará el cuerpo a 160 ^{0}F?

Solución. La ecuación diferencial que modela el problema es

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - 370),\ T(0) = 40 \text{ y } T(60) = 120,$$

donde la solución al valor inicial se escribe $T(t) = 370 - 330e^{kt}$, usamos la segunda condición para calcular el valor de la constante k; al cabo de una hora (60

mini) se tiene $T(60) = 120$, es decir $120 = 370 - 330e^{60k}$, aproximadamente $k = \frac{1}{60} ln\left(\frac{25}{33}\right) \approx -0{,}0046$. Por tanto, la solución de estimación es

$$T(t) = 370 - 330e^{-0{,}0046t}. \qquad (1)$$

En la ecuación (1), el cuerpo alcanzará la temperatura de $T = 160$ ⁰F cuando

$$160 = 370 - 330e^{-0{,}0046t},$$

de donde $t = \frac{ln\left(\frac{7}{11}\right)}{-0{,}0046} \approx 98{,}26$ min. (1h, 38 min); por lo tanto, la temperatura será de 160 ⁰F a eso de las 11:38 horas.■

Ejemplo 34. Una taza de café con temperatura de 180 ⁰F se pone en un cuarto cuya temperatura es 60 ⁰F. Dos minutos después la temperatura del café es 160 ⁰F. ¿Después de cuánto tiempo la temperatura del café será 140 ⁰F?

Solución. Consideremos $T(t)$ la temperatura (en ⁰F) del café en el momento t, donde la temperatura del medio es $T_m = 60$, entonces se trata de una ecuación diferencial que cumple las condiciones iniciales

$$\begin{cases} \frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - 60) \\ T(0) = 180 \text{ y } T(2) = 160 \end{cases},$$

la solución al problema de valor inicial $T(0) = 180$ es $T(t) = 60 + 120e^{kt}$, ahora la segunda condición para encontrar el valor la constante k; $T(2) = 160$,

$$160 = 60 + 120e^{2k},$$

de donde $k = \frac{1}{2} ln\left(\frac{5}{6}\right) \approx -0{,}0915$, siendo entonces la solución de estimación, sirve para cualquier t positivo,

$$T(t) = 60 + 120e^{-0{,}0915t}. \qquad (1)$$

En (1), calculamos el tiempo t_1 cuando la temperatura es 140 ⁰F, se decir $T(t_1) = 140$, tenemos entonces en (1), $140 = 60 + 120e^{-0{,}0915t_1}$, tomando logaritmo natural y despejando el tiempo $t_1 = \frac{ln\left(\frac{2}{3}\right)}{-0{,}0915} \approx 4{,}4313$ min. Por lo tanto deben transcurrir unos 4 min, 25 s para que la temperatura del café sea de 140 ⁰F.■

Ejemplo 35. La temperatura de un motor en el momento en que se apaga es de 200 ⁰C y la temperatura del aire que lo rodea es de 30 ⁰C. Transcurridos 10 min la temperatura del motor llega a 180 ⁰C. ¿Cuánto tiempo pasará para que la temperatura del motor baje hasta 40 ⁰C?

Solución. Consideremos $T(t)$ la temperatura (en ⁰C) del motor en el momento t, donde la temperatura del medio es $T_m = 30$ ⁰C, entonces se trata de una ecuación diferencial que cumple las condiciones iniciales

$$\begin{cases} \frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - 30) \\ T(0) = 200 \text{ y } T(10) = 180 \end{cases},$$

la solución al problema de valor inicial $T(0) = 200$ es $T(t) = 30 + 170e^{kt}$, ahora la segunda condición para encontrar el valor la constante k; $T(10) = 180$,

$$180 = 30 + 170e^{10k},$$

de donde $k = \frac{1}{10} ln\left(\frac{15}{17}\right) \approx -0{,}0125$, siendo entonces la solución de estimación, y sirve para cualquier t positivo,

$$T(t) = 30 + 170e^{-0{,}0125t}. \qquad (2)$$

En (2), calculamos el tiempo t_1 cuando la temperatura es 40 ⁰C, se decir $T(t_1) = 40$, tenemos entonces en (1), $40 = 30 + 170e^{-0{,}0125t_1}$, tomando logaritmo natural y despejando el tiempo $t_1 = \frac{ln\left(\frac{1}{17}\right)}{-0{,}0125} \approx 226{,}6570$ min. Por lo tanto, deben transcurrir 3 horas, 46 minutos, 18 segundos.■

APLICACIÓN A LA MEDICINA

Ejemplo 36. Un ganadero salió una tarde a cazar un zorro que estaba merodeando el corral de su rebaño. El cuerpo del ganadero fue encontrado sin vida por un viajero, en un cerro cerca de su choza junto al animal cazado, a las 7:00 h del día siguiente. Un médico forense llegó a las 8:00 h y tomó la temperatura del cadáver, a esa hora anotó 20 ⁰C, una hora más tarde, al darse cuenta ya en la noche, y aún a esas horas, la temperatura ambiente era aproximadamente de 6 ⁰C, el médico volvió a medir la temperatura corporal del cadáver y observó que era de 18 ⁰C. ¿A qué hora murió el ganadero aproximadamente?

Solución. Según la información proporcionada, se tiene que la temperatura ambiente se mantuvo casi constante como $T_m = 6$ ⁰C, y antes de su muerte, la temperatura corporal del ganadero era de 36 ⁰C. Nuestra opinión es que el forense estuvo correcto en tomar dos lecturas, ya que estos datos servirán para encontrar el valor de la constante k; entonces tenemos una ecuación diferencial con valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - 6)) \\ T(0) = 20 \quad y \quad T(1) = 18 \end{cases}.$$

Se entiende que $t = 0$ a las 8:00 h y $t = 1$ a las 9:00 h. La solución de la ecuación está dado por $T(t) = 6 + ce^{kt}$, hallamos la constante aplicando la condición $T(0) = 20$, y tenemos $20 = 6 + ce^0$, así $c = 14$; por tanto se tiene

$$T(t) = 6 + 14e^{kt}\ , \qquad (3)$$

en (3) aplicamos la segunda condición, $T(1) = 18 = 6 + 14e^{k}$ donde $k = ln\left(\frac{6}{7}\right)$, aproximadamente $k \approx -0{,}154150$. Entonces la ecuación para estimar cualquier valor es

$$T(t) = 6 + 14e^{-0{,}154150t}\ . \qquad (4)$$

Por último, para determinar t_1 talque $T(t_1) = 36$, estimamos en la ecuación en (4),

$$36 = 6 + 14e^{-0{,}154150t_1},$$

despejando $t_1 = \frac{ln\left(\frac{15}{7}\right)}{-0{,}15415} \approx -4{,}9441$ (el signo negativo quiere decir antes de). Por lo tanto, el deceso ocurrió aproximadamente 4 h, 56 min antes de las 8:00 h 8hora de la primera toma de temperatura), debe ser, alrededor de las 3:04 horas. ■

PROBLEMAS 4.12

1. Un termómetro en el que se lee 70 ^{0}F se ubica en un lugar donde la temperatura es 10 ^{0}F. cinco minutos después el termómetro señala 40 ^{0}F. ¿Qué tiempo debe pasar para que el termómetro marque medio grado más que la temperatura del medio ambiente?
   R. 34 min, 34 s.
2. Un termómetro que está en el interior de una habitación se traslada al exterior donde la temperatura es 6 ^{0}F. Después de un 1 min el termómetro se lee 60 ^{0}F y luego 5 min se lee 35 ^{0}F. ¿Cuál era la temperatura del termómetro en la habitación?
   R. 74.65 ^{0}F aproximadamente.
3. Un objeto a una temperatura desconocida se coloca en un refrigerador a una temperatura permanente de 0 ^{0}F. Si luego de 20 min la temperatura del objeto es de 40 ^{0}F y después de 40 min es de 20 ^{0}F. Calcule la temperatura inicial del objeto.
   R. 80 ^{0}F.
4. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20 ^{0}C, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Sabiendo que su temperatura aumentó 2 ^{0}C en un segundo; a) obtener la función de estimación de la temperatura del cuerpo en cualquier instante t; b) calcule el tiempo que tarda la barra en alcanzar 90 ^{0}C; c) calcular el tiempo que demora la barra en alcanzar 98 ^{0}C.
   R. a) $T(t) = 100 - 80e^{tln\left(\frac{39}{40}\right)}$; b) 82,1 s; c) 145,7 s.

5. En una habitación la temperatura que marca un termómetro clínico es 20 ^{0}C. Para detectar si un paciente tiene fiebre (definida como temperatura corporal de 38 ^{0}C o más) se pone un termómetro en la axila del paciente. Si después de un minuto el termómetro lee 27 ^{0}C en una persona sana (con temperatura de 36 ^{0}C), ¿cuánto tiempo se debe dejar en una persona con fiebre para detectarla con un error no mayor que 0,2 ^{0}C?

   R. Aproximadamente 7 min 50 s.

6. Camilo invitó a Beni a tomar café en la mañana. Él sirvió dos tazas de café. Beni le agregó crema para baja la temperatura de su café a 1 ^{0}F. Luego de 5 min, Camilo también agregó crema a su café hasta disminuir en 1 ^{0}F. Sólo entonces, Camilo como Beni iniciaron a tomar su café. ¿Quién tenía el café más frío?

   R. Camilo.

7. Un objeto a una temperatura de 50 ^{0}F se pone al aire libre donde la temperatura es de 100 ^{0}F. Transcurrido 5 min la temperatura del objeto es de 60 ^{0}F; a) calcule el tiempo que requiere el objeto para alcanzar una temperatura de 75 ^{0}F; b) calcule la temperatura del objeto después de 20 minutos.

   R. 15,4 min, 76,6 ^{0}F.

8. Preciso antes del mediodía se encontró el cuerpo de una víctima de un presunto homicidio dentro de un departamento que se conserva a una temperatura constante de 70 ^{0}F. A las 12 del día la temperatura del cuerpo era de 80 ^{0}F y a la 1 de la tarde era de 75 ^{0}F. Considerando que la temperatura del cuerpo al morir era de 98.6 ^{0}F. Calcular la hora en que murió la víctima. Observación: El proceso de enfriamiento cumple la ley de Newton.

   R. Aprox. 10:30.

9. Un material cerámico se retira en cierto momento de un horno cuya temperatura es de 750 ^{0}C, para continuar con la segunda etapa del proceso se requiere que el material se encuentre a una temperatura de cuando mucho 200 ^{0}C. Asuma que la temperatura de una sala de enfriamiento donde se pondrá este cerámico es de 5 ^{0}C y que, después de 15 min, la temperatura del material es de 600 ^{0}C. Calcule el tiempo cuando el material cerámico estará listo para ingresar a la segunda etapa del proceso.

   R. 1h, 29 min, 22s.

10. Una vasija con agua a una temperatura de 100 ^{0}C se lleva a una habitación que se mantiene a una temperatura constante de 25 ^{0}C. Luego de 3 min la temperatura del agua es de 90 ^{0}C. Calcular la temperatura del agua luego de

15 min. Encuentre el tiempo que debe pasar para que la temperatura del agua sea 40 ^{0}C.

R. 61.67 ^{0}C, 33 min, 44 s.

4.21 PROBLEMA DE MEZCLADO

Muchos problemas importantes en Ingeniería y biología tienen que ver con mezclados. Es frecuente, al mezclar dos líquidos produce una ecuación diferencial lineal de primer orden. En los problemas de mezclados aparecen involucradas sustancias, las cuales se mezclan dentro de un recipiente de volumen dado V_0. El problema tiene ver con una cierta sustancia M fluya con una rapidez dentro de un recipiente que contiene una mezcla, que mediante una agitación se mantenga uniforme. La idea es que esta mezcla uniforme sale al exterior del recipiente con otra rapidez que puede ser igual o diferente (Kreider, 1973).

El problema consiste en determinar la cantidad de sustancia M que está presente en el tanque en el instante t, entonces la rapidez de variación de x respecto de t es la derivada $\frac{dx}{dt}$, ahora si denotamos por E la razón con lo que la sustancia M entra en la mezcla y por S la razón con lo que sale, se formula una ley que cumple la ecuación de continuidad

$$AUMENTO = (rapidez\ de\ entrada) - (rapidez\ de\ salida)$$

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

entonces a partir de esta ecuación diferencial podemos determinar la cantidad de M en el instante t, esto dos tipos de problemas, también se denominan *análisis compartimental*.

Ejemplo 37. Un tanque contiene 2000 litros de una solución que consta de 100 kg de sal disuelto en agua. Se bombea agua pura hacia al tanque a razón 5 l/s, y la mezcla se extrae a la misma razón, ¿Cuánto tiempo pasará para que se queden 20 kg de sal en el tanque?

Solución. Consideremos x la cantidad de kg de sal al cabo de t segundos. La concentración al cabo de t segundos es

$$C = \frac{x}{2000},$$

debido a que la razón que entra y sale es la misma.

Cantidad que sale es

$$5\left(\frac{x}{2000}\right) dt \text{ en } l/s,$$

está claro 0 kg en razón que entra agua pura, luego teniendo en cuenta la ecuación de continuidad,

$$AUMENTO = ENTRADA - SALIDA$$

$$dx = 0 - 5\left(\frac{x}{2000}\right)dt,$$

es una ecuación de variable separable donde $x \in [100,20]$ y $t \in [0, t]$ se obtiene

$$\int_{100}^{20} \frac{dx}{x} = -\frac{1}{400}\int_0^t dt,$$

de donde $t = 400\ln(5)\ s \cong 10{,}7$, minutos.■

Ejemplo 38. Un tanque contiene originalmente 200 galones de agua pura. Se vierte entonces agua que contiene media libra de sal por galón dentro del tanque a una velocidad de 2 galones/minuto, y se permite que salga la mezcla con la misma rapidez. Luego de 10 minutos se detiene el proceso y se vierte agua pura dentro del tanque a la velocidad de 2 galones/minuto dejando salir también la mezcla a la misma velocidad. Obtener la cantidad de sal en el tanque al final de los 20 minutos.

Solución. Consideremos x la cantidad de libras de sal que hay en el tanque al cabo de t segundos. La concentración al cabo de t segundos es

$$C = \frac{x}{200},\ \text{libras/galón}$$

Ahora en el tiempo dt entran

$$\frac{1}{2}(2)dt\ \text{libras de sal.}$$

Cantidad que sale en dt

$$2\left(\frac{x}{200}\right)dt\ \text{libras de sal,}$$

luego teniendo en cuenta la ecuación de continuidad,

$$AUMENTO = ENTRADA - SALIDA$$

$$dx = dt - 2\left(\frac{x}{200}\right)dt,$$

es una ecuación de variable separable,

$$\int \frac{100}{100 - x}dx = \int dt + c$$

$$-100\ln(100 - x) = t + c,$$

al satisfacer la condición inicial $x(0) = 0$, se tiene que $c = -100\ln(100)$, la solución al problema de valor inicial es

$$-100\ln(100 - x) = t - 100\ln(100)$$

es decir

$$x(t) = 100\left(1 - e^{-\frac{t}{100}}\right).$$

Por tanto, al cabo de $t = 10$ minutos se tiene

$$x(10) = 100\left(1 - e^{-\frac{10}{100}}\right) \cong 9{,}51 \text{ libras de sal.}\blacksquare$$

Segunda etapa: El depósito tiene constantemente 200 galones de la mezcla, consideremos sea y la cantidad que hay en el tanque al cabo de t minutos. La concentración es pues

$$C = \frac{y}{200},$$

como entran cero libras de sal, en un tiempo dt salen

$$2\left(\frac{y}{200}\right)dt,$$

aplicando la ecuación de continuidad

$$dy = -\frac{2y}{200}dt,$$

es una ecuación separable integramos en $x \in [9{,}51; x]$ y $t \in [10{,}20]$ se tiene

$$\int_{9{,}51}^{x} \frac{dy}{y} = -\int_{10}^{20} \frac{1}{100}dt$$

$$ln\left(\frac{x}{9{,}51}\right) = -\frac{1}{10}.$$

Por tanto, $x = 9{,}51e^{-0{,}1} \cong 8{,}61$ libras de sal.■

Ejemplo 39. Un tanque contiene originalmente 200 galones de agua pura. Iniciando en $t = 0$, una salmuera que contiene 4 libras de sal por galón entra al tanque a razón de 5 galones/minuto. La mezcla se conserva uniforme mediante agitación, y estando bien agitado sale con una rapidez de 4 galones/minuto. (a) ¿Qué cantidad de sal habrá en el tanque después de 20 minutos? ¿Cuándo habrá en el tanque 50 libras de sal?

Solución. Consideremos x la cantidad de libras de sal que hay en el tanque al cabo de t minutos. La concentración al cabo de t minutos es

$$C = \frac{x}{200}, \text{ libras/galón}$$

ahora en el tiempo dt entran

$$5\,(4)dt \text{ libras de sal.}$$

Cantidad que sale en dt

$$4\left(\frac{x}{200}\right)dt \text{ libras de sal,}$$

luego teniendo en cuenta la ecuación de continuidad,

$$AUMENTO = ENTRADA - SALIDA$$

$$dx = 20dt - 4\left(\frac{x}{200}\right)dt,$$

es una ecuación de variable separable, integrando

$$\int \frac{5}{100-x}dx = \int dt + c$$
$$x(t) = 100 - ke^{-t/5}.$$

(a) Al satisfacer la condición inicial $x(0) = 0$, se tiene que $k = 100$, la solución al problema de valor inicial es

$$x(t) = 100(1 - ke^{-\frac{t}{5}}),$$

por tanto al cabo de $t = 20$ minutos se tiene

$$x(20) = 100\left(1 - e^{-\frac{20}{5}}\right) \cong 98{,}2 \text{ libras de sal.}\blacksquare$$

(b) Se tendrá $x = 50$ libras de sal si

$$50 = 100\left(1 - e^{-\frac{t}{5}}\right),$$

de donde

$$t = 5\ln(2) = 3{,}47 \text{ minutos. } \blacksquare$$

Ejemplo 40. Un tanque $x_0 lb$ de sal disuelto en 400 galones de agua. En el tiempo $t = 0$ entra agua que contiene $\frac{1}{4} lb$ de sal por galón, con una velocidad de $8\ gal/min$, y la solución homogenizada sale del depósito con la misma intensidad. Determine la concentración de sal en el tanque para todo tiempo $t > 0$.

Solución. Denotemos por $x(t)$ la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t debe ser igual a la velocidad con el cual entra la sal en el tanque. Rapidez con que entra:

$$E = \left(\frac{1}{4} lb/gal\right)(8gal/min) = 2\ lb/min.$$

Por tanto,

$$\frac{dx}{dt} = E - S = 2 - \frac{x}{50},\ x(0) = x_0,$$

tiene como solución,

$$x(t) = x_0 e^{-0{,}02t} + 100(1 - e^{-0{,}02t}). \qquad (1)$$

Por lo tanto, la concentración $c(t)$ de sal en el tanque es

$$c(t) = \frac{x(t)}{400} = \frac{x_0 e^{-0{,}02t}}{400} + \frac{1}{4}(1 - e^{-0{,}02t}).$$

Observación. En (1), el término $x_0 e^{-0{,}02t}$ representa la porción de la cantidad original de sal que permanece en el tanque en el tiempo t, lo cual se vuelve cada vez más pequeño con el paso del tiempo, conforme la solución original sale del depósito; lo mismo en (1) el término $100(1 - e^{-0{,}02t})$ representa la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t, debida a la acción del flujo. Naturalmente cuando $t \to \infty$ la cantidad de sal en el tanque debe tender al valor $100\ lb$.

PROBLEMAS 4.13

1. Un tanque contiene 1000 litros de una solución que consta de 100 kg de sal disuelto en agua. Se bombea agua pura hacia al tanque a razón 5 l/s, y la mezcla se extrae a la misma razón, ¿Cuánto tiempo pasará para que se queden 10 kg de sal en el tanque?

   R. $t \cong 4{,}41$ minutos.
2. Un tanque contiene originalmente 100 galones de agua pura. Se vierte entonces agua que contiene media libra de sal por galón dentro del tanque a una velocidad de 2 galones/minuto, y se permite que salga la mezcla con la misma rapidez. Luego de 10 minutos se detiene el proceso y se vierte agua pura dentro del tanque a la velocidad de 2 galones/minuto dejando salir también la mezcla a la misma velocidad. Obtener la cantidad de sal en el tanque al final de los 20 minutos.

   R. $x \cong 9$ libras de sal; $x \cong 7{,}4$ libras de sal.
3. Un tanque contiene originalmente 200 galones de agua pura. Iniciando en $t = 0$, una salmuera que contiene 4 libras de sal por galón entra al tanque a razón de 5 galones/minuto. La mezcla se conserva uniforme mediante agitación, y estando bien agitado sale con una rapidez de 4 galones/minuto. (a) ¿Qué cantidad de sal habrá en el tanque después de 20 minutos? ¿Cuándo habrá en el tanque 50 libras de sal?

   R. (a) 300,1 libras de sal; (b) 2,6 minutos.
4. Un tanque contiene $x_0 lb$ de sal disuelto en 600 galones de agua. En el tiempo $t = 0$ entra agua que contiene $\frac{1}{2} lb$ de sal por galón con una velocidad de 6 gal/min, y la solución homogenizada sale del depósito con la misma intensidad. Determine la concentración de sal en el tanque para todo tiempo $t > 0$.

4.22 CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Una aplicación a circuitos eléctricos tiene que ver con la segunda Ley de Kirchhoff. Estudiamos dos casos:

Circuitos eléctricos L-R en serie. Sea L la inductancia, R la resistencia; $E(t)$ la tensión aplicada al circuito, figura 4.24. La segunda ley de Kirchhoff dice un circuito en serie que contiene sólo una resistencia y una inductancia, la suma de

las caídas voltaje a través del inductor $L\frac{di(t)}{dt}$ y del resistor $i(t)R$ es igual a la tensión aplicada al circuito, por tanto, la ecuación diferencial queda así

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E(t)\,, \qquad \text{(a1)}$$

de donde se puede obtener la corriente $i(t)$ del sistema.
La ecuación (a1) es lineal y tiene como solución general

$$i(t) = \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}E(t)dt + ce^{-\frac{R}{L}t},$$

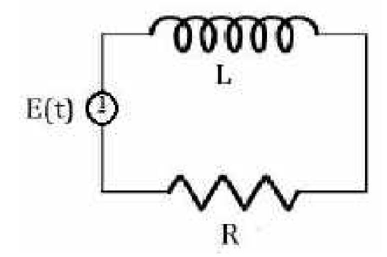


Figura 4.24: Circuito eléctrico L-R en serie.

si $E(t) = E_0$ es constante se obtiene

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + ce^{-\left(\frac{R}{L}\right)t},$$

y cuando el tiempo es grande $t \to \infty$ se tiene corriente estacionaria $\frac{E_0}{R}$, la corriente en el circuito parece que solo estuviera influenciada por la ley de Ohm, $iR = E$.
Circuito eléctrico R-C en serie. Sea C la capacitancia, R la resistencia, $q(t)$ la carga en el capacitor (o condensador), ña caída de voltaje a través de C es $\frac{q(t)}{c}$, la figura 4.25. Por tanto, la segunda ley de Kirchhoff dice

$$Ri + \frac{1}{c}q(t) = E(t), \qquad \text{(a2)}$$

pero la corriente $i(t)$ y la carga $q(t)$ están relacionado por $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, luego convierte en una ecuación diferencial lineal,

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{c}q(t) = E(t). \qquad \text{(a3)}$$

Al ser (a3) una ecuación diferencial lineal, tiene como solución general,

$$q(t) = \frac{e^{-\frac{1}{RC}t}}{R}\int e^{\frac{1}{RC}t}E(t)dt + ce^{-\frac{1}{RC}t}\,.$$

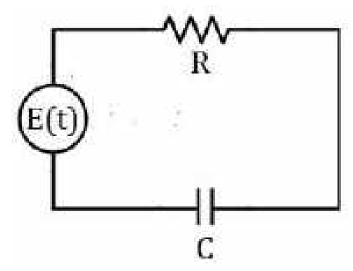


Figura 4.25: Circuito eléctrico R-C en serie.

Ejemplo 41. Una batería de 10V (volts) se conecta a un circuito simple en serie en el cual la inductancia es $\frac{1}{4}H$ (henrys), y la resistencia de 8 Ω (ohms). Determinar la corriente si la intensidad inicial es cero.

Solución. La ecuación diferencial es como (a1),

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E(t)$$

donde $L = \frac{1}{4}$, $R = 8$, $E = 10$, es decir

$$\frac{1}{4}\frac{di(t)}{dt} + 8i(t) = 10, \text{ con } i(0) = 0.$$

Al ser lineal se resuelve con el factor integrante $u(t) = e^{32t}$ y se tiene

$$i(t) = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}e^{-32t}. \blacksquare$$

Ejemplo 42. Se tiene un circuito en serie, con resistencia 200 Ω, capacitancia 10^{-4} F, se aplica una tensión de 100 V. Halle la carga $q(t)$ en capacitor si $q(0) = 0$, halle también la corriente $i(t)$.

Solución. Tenemos $R = 200\ \Omega$, $C = 10^{-4}F$, $E(t) = 100\ V$, la ecuación diferencial se escribe

$$200\frac{dq(t)}{dt} + 10^4 q(t) = 100,$$

es decir

$$\frac{dq(t)}{dt} + 50q(t) = \frac{1}{2},$$

ecuación diferencial lineal con factor integrante $u(t) = e^{50t}$ y solución general

$$q(t) = \frac{1}{100} + ce^{-50t},$$

al ser $q(0) = 0$ se obtiene $c = -\frac{1}{100}$, luego la solución al valor inicial es,

$$q(t) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100}e^{-50t}.$$

Por lo tanto, la corriente $i(t)$ se escribe

$$i(t) = \frac{1}{2}e^{-50t}. \blacksquare$$

PROBLEMAS 4.14

1. Se tiene un circuito en serie, con inductancia de $\frac{1}{10}H$ y la resistencia es de 50 Ω, hay una tensión de 30 V, determine la $i(t)$, si $i(0) = 0$. Halle la corriente estacionaria.
2. Se tiene un circuito en serie, con resistencia 200 Ω, capacitancia $10^{-6}F$, se aplica una tensión de 150 V. Calcule la carga $q(t)$ en el capacitor si $q(0) = 0$, halle también la corriente $i(t)$.
3. Resuelve la ecuación diferencial $L\frac{di}{dt} + Ri = E_0 sen(\theta t)$, donde $i(0) = i_0$.
4. Se tiene un circuito en serie, en el cual la resistencia es 800 Ω y la capacitancia es de $10^{-3}F$, se aplica una tensión de 80 V. Calcule la carga $q(t)$ en el capacitor si $q(0) = 0$, y halle la corriente $i(t)$.
5. Se tiene un circuito en serie, en el cual la resistencia es 1 500 Ω y la capacitancia es de $10^{-7}F$, se aplica una tensión de 250 V. Calcule la carga $q(t)$ en el capacitor si $i(0) = 0{,}2$, y halle la corriente y la carga para $t = 0{,}002s$, y la carga cuando el tiempo crece sin límite.

4.23 LEY DE ABSORCIÓN DE LAMBERT

Enunciamos y resolvemos la ecuación diferencial de la ley de absorción de Lambert. Esta Ley señala que la tasa de absorción de luz con respecto a una profundidad x de un material translúcido es proporcional a la intensidad x. Vamos hacer una formulación matemática, si I es la intensidad de la luz a una profundidad x, entonces

$$\frac{dI}{dx} = -cI\ ,$$

siendo c la constante de proporcionalidad, cumple una condición inicial $I(x_0) = I_0$. La solución al problema de valor inicial es

$$I(x) = I_0 e^{-c(x-x_0)}.$$

Ejemplo 43. La intensidad I a una profundidad de 40 pies es $\frac{5}{9}$ de la intensidad en la superficie. Encuentre la intensidad a 70 pies y a 140 pies.

Solución. Para $x_0 = 0$ se tiene la intensidad I_0 en la superficie, luego

$$I(x) = I_0 e^{-cx} \qquad (1)$$

se cumple

$$I(40) = \frac{5}{9} I_0$$

en (1),

$$\frac{5}{9}I_0 = I_0 e^{-40c}$$

tomando logaritmo resulta

$$c = \frac{Ln\left(\frac{9}{5}\right)}{40},$$

en (1) se tiene

$$I(x) = I_0 e^{-\frac{\ln\left(\frac{9}{5}\right)}{40}x} \qquad (2)$$

En (2), aplicamos la condición

$$I(70) = I_0 e^{-\frac{\ln\left(\frac{9}{5}\right)}{40}(70)} = I_0 \left(\frac{5}{9}\right)^{7/4}.$$

$$I(140) = I_0 e^{-\frac{\ln\left(\frac{9}{5}\right)}{40}(140)} = I_0 \left(\frac{5}{9}\right)^{7/2}. \blacksquare$$

Ejemplo 44. En agua limpia la intensidad I a 4 pies bajo la superficie es de un 25% de la intensidad I_0 en la superficie. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 20 pies bajo la superficie?

Solución. Cuando $x = 0$ en la superficie se tiene $I = I_0$, la ecuación es

$$I(x) = I_0 e^{-cx} \qquad (1)$$

cuando $x = 4$ pies la intensidad es

$$I(4) = 0{,}25 I_0,$$

en (1)

$$0{,}25 I_0 = I_0 e^{-4c}$$
$$e^{-c} = (0{,}25)^{1/4}$$

es decir,

$$I(x) = I_0 (e^{-c})^x = I_0 (0{,}25)^{x/4}$$

para $x = 20$ pies

$$I(20) = I_0 (0{,}25)^{20/4} = I_0 (0{,}25)^5. \blacksquare$$

4.24 MÁQUINA QUITA NIEVES

Modelamos y resolvemos una ecuación diferencial que tiene que ver con el movimiento de una máquina quitanieves.

Tenemos, una máquina quitanieves desplaza un volumen de V ($m^3/hora$), barriendo un ancho b metros de la carretera. El quitanieves avanza con una velocidad que varía según la cantidad de nieve en la carretera. La cantidad de nieve influye para mantener V constante en el tiempo. Se asume que nieva

regularmente, de tal modo que la altura de nieve crece a razón de r metros/hora. Luego de empezar a nevar, la máquina empieza la limpieza de la carretera en $t = 0\ (horas)$.

Sea $x(t)$ la longitud de la carretera en km limpiada por la máquina. La máquina comienza a funcionar en el momento $t = 0$, en consecuencia empezó a nevar en el instante $t = t_0, t_0 < 0$.

Sea $h(t)$ l altura de la nieve en la carretera en el instante t, y sea $h_0 = h(0)$ la altura inicial, esto es cuando la máquina empieza a funcionar. Considerando que nieva regularmente, se cumple

$$h(t) = h_0 + rt\,, \qquad (1)$$

la máquina mantiene constante el volumen de nieve quitado, se cumple

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V}{b}.\frac{1}{h(t)} \qquad (2)$$

de (1) en (2)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V}{b}\left(\frac{1}{h_0+rt}\right) \qquad (3)$$

Solución de la ecuación separable (3)

$$x(t) = \frac{V}{b}\int \frac{dt}{h_0+rt} + k$$

$$= \frac{V}{rb} Ln(h_0 + rt) + k \qquad (4)$$

siendo k constante.

aplicamos la condición inicial $x(0) = 0$ en (4)

$$0 = \frac{V}{rb} ln(h_0) + k,$$

en (4)

$$x(t) = \frac{V}{rv} Ln(h_0 + rt) - \frac{V}{rt} Ln(h_0)$$

$$x(t) = \frac{V}{rt} ln\left(1 + \frac{rt}{h_0}\right). \blacksquare$$

Ejemplo 45. Está nevando, en la primera hora de trabajo, la máquina ha limpiado $\frac{1}{2}$ km de carretera y en la segunda hora ha avanzado $\frac{1}{4}$ km más. Si la máquina empezó la limpieza a las 10 horas, determine en qué hora empezó a nevar.

Solución. Aplicamos las condiciones iniciales

$$x(1) = \frac{1}{2}km, x(2) = \frac{3}{4}\ km$$

aplicamos en

$$x(t) = \frac{V}{rb} ln\left(1 + \frac{rt}{h_0}\right)$$

$$\frac{V}{rb} ln\left(1 + \frac{r}{h_0}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{V}{rb}ln\left(1+\frac{2r}{h_0}\right)=\frac{3}{4}$$
$$3ln\left(1+\frac{r}{h_0}\right)=2ln\left(1+\frac{2r}{h_0}\right)$$
$$\left(1+\frac{2r}{h_0}\right)^2=\left(1+\frac{r}{h_0}\right)^3.$$

Sea $B=\frac{r}{h_0}$, $(1+2B)^2=(1+b)^3$, de donde $B=0$ o $B=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. En vista que $B=\frac{r}{h_0}$ es positivo, sólo puede ser $B=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{r}{h_0}$, luego de

$$0=h_0+rt$$

resulta

$$t_0=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\approx-0{,}61.$$

Es decir, empezó a llover aproximadamente $10-0{,}61=9{,}39\ h$ de la mañana, que son (aproximadamente) las 9 horas 23 minutos. ■

PROBLEMAS 4.15

1. Si I a una profundidad de 20 pies es $\frac{4}{5}$ de la intensidad en la superficie, encuentre la intensidad a 80 pies.
2. En agua limpia la intensidad I a 5 pies bajo la superficie es de un 30% de la intensidad I_0 en la superficie. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 30 pies bajo la superficie?
3. Está nevando, en la primera hora de trabajo, la máquina ha limpiado 2 km de carretera y en la segunda hora ha avanzado 1 km más. Si la máquina empezó la limpieza a las 12 horas, determine en qué hora empezó a nevar.

***



ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

5.1 INTRODUCCIÓN

Existen variados problemas que pueden ayudar de motivación para llegar a una ecuación lineal de segundo orden. Para señalar un ejemplo, se ilustra un fenómeno físico de movimiento amortiguado de masa m asociada a un muelle elástico a una pared, figura 5.1. Cuando se aplica a la masa unida al resorte una fuerza $F(t)$ hacia la izquierda, de manera que el muelle se comprima, entonces éste reacciona con una fuerza de igual magnitud hacia la derecha que produce un desplazamiento de la masa en ese sentido hasta hacer tope con una pieza elástica que amortigua dicho desplazamiento hasta que la masa se para.

En ese instante el muelle se encontrará extendido en relación de su posición de reposo, esto producirá un nuevo desplazamiento de la masa hacia la izquierda, provocando una nueva comprensión del muelle, y así sucesivamente. La amortiguación del movimiento del resorte se puede producir no sólo por contacto con otra pieza elástica sino también por rozamiento con el medio o por otra causa.

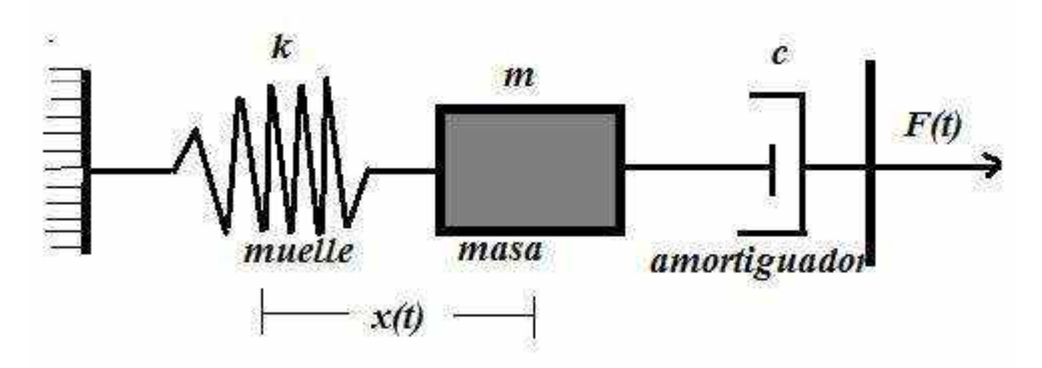


Figura 5.1. Movimiento amortiguado de una masa unida a un muelle elástico.

Asumiendo que la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad $cx'(t)$, siendo k una constante que mide la *rigidez* del muelle (hay que ver de qué material está hecho), la segunda ley de Newton lleva a la ecuación

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t),$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden y estudia un fenómeno físico. Esta ecuación cuando se aplica la condición inicial, $x(0) = x_0$ que es la posición de la masa en el momento inicial, $x'(0) = v_0$ es la velocidad de la masa en el momento inicial; esto ya forma un problema de condiciones iniciales

$$\begin{matrix} mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t \\ x(0) = x_0, \ x'(0) = v_0 \end{matrix}.$$

Otra aplicación de las ecuaciones diferenciales se presenta en el estudio de circuitos eléctricos que consiste en resistores, inductores y capacitores, el cual se aplica una fuerza electromotriz. En este caso aplicando las leyes de Kirchhoff conduce a la ecuación de segundo orden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E(t),$$

donde, L es la inductancia, R la resistencia. C la capacitancia, $E(t)$ la fuerza electromotriz, $q(t)$ la carga y t el tiempo.

Por otro, no solo son ecuaciones con coeficientes constantes; también hay ecuaciones con coeficientes variables, como la ecuación de Bessel,

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - n^2)x = 0,$$

o la ecuación de Legendre,

$$(1 - t^2)x'' + 2tx' + \rho(\rho + 1)x = 0.$$

Principalmente estudiaremos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden; sin embargo, la teoría lo haremos de manera general, aunque estas ecuaciones son difíciles de resolver analíticamente, salvo en casos muy excepcionales como estudiaremos aquí.

5.2 SOLUCIONES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Definición 5.1. Una ecuación diferencial lineal de orden n se escribe

$$a_0(t)\frac{d^nx}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = F(t)$$

donde, $a_0(t) \neq 0$, $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t), F(t)$ son funciones continuas en el intervalo $\langle a, b\rangle$. En el caso que $F(t) = 0$, la ecuación

$$a_0(t)\frac{d^nx}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0$$

se denomina *ecuación diferencial lineal no homogénea*. Naturalmente si $F(t) \neq 0$, la ecuación se dice no homogénea.

Teorema 5.1. Sea la ecuación

$$a_0(t)\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=F(t)$$

con $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t), F(t)$ funciones continuas en el intervalo $\langle a,b\rangle$, y $a_0(t)\neq 0$ para cada $t\in\langle a,b\rangle$. Si t_0 es un punto cualquiera de $\langle a,b\rangle$ y $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ son constantes reales cualesquiera. Entonces existe una única solución $f(t)$ que satisface

$$f(t_0)=c_0, f'(t_0)=c_1,\dots, f^{(n-1)}(t_0)=c_{n-1}.$$

Teorema 5.2. Sea $f(t)$ una solución de la ecuación homogénea de orden n

$$a_0(t)\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0$$

con $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$, funciones continuas en el intervalo $\langle a,b\rangle$, y $a_0(t)\neq 0$ para cada $t\in\langle a,b\rangle$. Si cumple $f(t_0)=0$, $f'(t_0)=0,\dots, f^{(n-1)}(t_0)=0$. Entonces $f(t)=0$, para cada $t\in\langle a,b\rangle$. En este caso a $f(t)=0$ se denomina *solución trivial* para todo $t\in\langle a,b\rangle$.

Definición 5.2. Las funciones $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ se llaman *linealmente dependientes* en $a<t<b$, si existen constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ no todos ceros, de manera que,

$$c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+c_3f_3(t)+\cdots+c_nf_n(t)=0.$$

Definición 5.3. Las funciones $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ se llaman *linealmente independientes* en $a<t<b$, si de,

$$c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+c_3f_3(t)+\cdots+c_nf_n(t)=0,$$

entonces $c_1=0, c_2=0, c_3=0, \dots, c_n=0$.

En este caso, para que exista una independencia lineal de las funciones $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ en $\langle a,b\rangle$, se tiene como única combinación lineal a la *combinación trivial*,

$$0.f_1(t)+0.f_2(t)+0.f_3(t)+\cdots+0.f_n(t)=0.$$

Ejemplo 1. Las funciones $f_1(t)=t^2$, $f_2(t)=4t^3$ son linealmente independientes. En efecto es suficiente escribir,

$$c_1t^2+c_2(4t^3)=0,$$

se cumple sólo si,

$$\begin{cases} c_1=0 \\ 4c_2=0' \end{cases}$$

de donde necesariamente resulta $c_1=0$, $c_2=0$, $\forall t\in\langle -\infty,+\infty\rangle$. ■

Ejemplo 2. Las funciones $f_1(t)=2t^4$, $f_2(t)=t^4$ son linealmente dependientes. En efecto es suficiente escribir,

$$c_1(2t^4)+c_2(t^4)=0,$$

se tiene $(2c_1 + c_2)t^4 = 0$ cumple sólo si, $2c_1 + c_2 = 0$; es decir $c_2 = -2c_1$. Así vemos que existen c_1, c_2 no ceros de modo que la combinación lineal es nula; por fijar sea $c_1 = 1$, entonces $c_2 = -2$; sin embargo,

$$(2t^4) - 2(t^4) = 0.$$

Teorema 5.3. La ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de orden n,

$$a_0(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0, \qquad (1)$$

tiene n soluciones linealmente independientes.

Importante, si consideramos $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ que son soluciones linealmente independientes de (1), cada solución $f(t)$ de (1) es posible escribir como una combinación lineal,

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n\, f_n(t),$$

con $t \in \langle a, b\rangle$ y $c_1, c_2, \dots + c_n$ son constantes.

Definición 5.4. Si $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ son n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial de orden n en (1), entonces al conjunto

$$\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\},$$

se le denomina *sistema fundamental de soluciones* de (1) y a la función

$$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n\, f_n(t), \qquad (2)$$

se le denomina *solución general* de (w_1), donde $c_1, c_2, \dots + c_n$ son constantes arbitrarias y $t \in \langle a, b\rangle$.

Considerando las condiciones iniciales, $f(t_0) = x_0, f'(t_0) = x_1, \dots, f^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$; entonces las constantes $c_1, c_2, \dots + c_n$ de (2) tendrán que satisfacer el sistema,

$$\begin{cases} c_1 f_1(t_0) + c_2 f_2(t_0) + \cdots + c_n f_n(t_0) = x_0 \\ c_1 f_1'(t_0) + c_2 f_2'(t_0) + \cdots + c_n f_n'(t_0) = x_0 \\ \cdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 f_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n f_n^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} . \qquad (3)$$

Está claro que el sistema (3) tiene una solución para $c_1, c_2, \dots + c_n$ cuando el determinante de coeficientes no se hace cero en $t_0 \in \langle a, b\rangle$.

5.3 INDEPENDENCIA LINEAL Y WRONSKIANOS

Otra forma de ver la independencia lineal es con el uso del concepto de Wronskiano, nombre debido a su creador el matemático Wronski (1778-1853). Es importante observar que la independencia lineal depende principalmente del intervalo $\langle a, b\rangle$ que se considere (Nagle, 1999).

Definición 5.5. Sean $f_1(t), f_2(t), \ldots., f_n(t)$ funciones derivables $(n-1)$ veces en el intervalo $a < t < b$. El determinante,

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_n(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & \cdots & f'_n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix},$$

se denomina Wronskiano de las funciones $f_1(t), f_2(t), \ldots., f_n(t)$. Cabe destacar, en general el Wronskiano es una función, sin embargo es un número para $t = t_0$, y es

$$W(f_1(t_0), f_2(t_0), \ldots., f_n(t_0)).$$

Teorema 5.4. Sea la ecuación diferencial

$$a_0(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0$$

(1) Las soluciones $f_1(t), f_2(t), \ldots., f_n(t)$ de (w_1) son linealmente independientes en $t \in \langle a, b\rangle$ si sólo si $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(t) \neq 0$ para algún $t \in \langle a, b\rangle$.

(2) Mientras que las funciones $f_1(t), f_2(t), \ldots., f_n(t)$ son linealmente dependientes si $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(t) \neq 0$ para todo $t \in \langle a, b\rangle$.

Ejemplo 3. Las funciones $f_1(t) = e^{2t}$, $f_2(t) = e^{-3t}$ son linealmente independientes en $t \in \langle -\infty, +\infty\rangle$. En efecto, si calculamos el Wronskiano,

$$W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-3t} \\ 2e^{2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -5e^{-t} \neq 0,\ \forall t \in \langle -\infty, +\infty\rangle.$$

Ejemplo 4. Sean las funciones $f_1(t) = 1, f_2(t) = sen(t), f_3(t) = 2sen(t)$ definidas en $-\infty < t < +\infty$ son linealmente dependientes. En efecto, calculamos el Wronskiano,

$$W(f_1, f_2, f_2)(t) = \begin{vmatrix} 1 & sen(t) & 2sen(t) \\ 0 & \cos(t) & 2\cos(t) \\ 0 & -sen(t) & -2sen(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(t) & 2\cos(t) \\ -sen(t) & -2sen(t) \end{vmatrix}$$

$$= -2sen(t)\cos(\mathrm{t}) + 2\mathrm{sen}(\mathrm{t})\cos(\mathrm{t}) = 0, \forall t \in \langle -\infty, +\infty\rangle.$$

Ejemplo 5. Las funciones $f_1(t) = 1, f_2(t) = sen(t), f_3(t) = cos(t)$ definidas en el intervalo $\langle -\infty, +\infty\rangle$ son linealmente independientes. En efecto, calculamos el Wronskiano,

$$W(f_1, f_2, f_2)(t) = \begin{vmatrix} 1 & sen(t) & cos(t) \\ 0 & \cos(t) & -sen(t) \\ 0 & -sen(t) & cos(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(t) & -sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{vmatrix}$$

$$= cos^2(t) - sen^2(t) = \cos(2t) \neq 0 \text{ para algún } t \in \langle -\infty, +\infty\rangle.$$

Ejemplo 6. Determine los intervalos en los que es seguro que exista una solución de la ecuación $t(t-2)\frac{d^3x}{dt^3} + e^{2t}\frac{dx}{dt} - 3t^3x = 0$.

Solución. Las funciones $a_0(t) = t(t-2) \neq 0$, lo cual dice que $t \neq 0, t \neq 2$, y además las funciones $a_2(t) = e^{2t}, a_3(t) = -3t^3$ son funciones continuas en el intervalo $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0,2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$. ■

Ejemplo 7. Determine los intervalos en los que es seguro que exista una solución para la ecuación diferencial $x'' + 2t^2x' + 5tx = \ln(2t)$.

Solución. Las funciones $a_0(t) = 1, a_1(t) = 2t^2, a_2(t) = 5t$ son funciones continuas en el intervalo $\langle -\infty, +\infty\rangle$; pero, la función $F(t) = \ln(2t)$ es válida para $t \in \langle 0, +\infty\rangle$; por lo tanto en común deberá tomarse el intervalo $t \in \langle 0, +\infty\rangle$. ■

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Si $x_1(t)$ es solución de la ecuación diferencial

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = f_1(t)$$

y $x_2(t)$ es solución de la ecuación

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = f_2(t).$$

Entonces $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ es solución de

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\,.$$

PROBLEMAS 5.1

1. Demuestre que las funciones $x_1(t) = t$ y $x_2(t) = |t|$ son linealmente dependientes en el intervalo $[0,1]$.
2. Demuestre que las funciones $x_1(t) = t$ y $x_2(t) = |t|$ son linealmente independientes en el intervalo $[-1,1]$.
3. Si $x(t) = c_1t^2 + \frac{c_2}{t}$, mediante la eliminación de parámetros, obtener una ecuación diferencial de segundo orden.
4. Si $x(t) = c_1t + c_2t^2$, elimine los parámetros para obtener la ecuación diferencial de segundo orden.
5. Demuestre que $x_1(t) = 0$ y $x_2(t) = t^2sen(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial $t^2x'' - 4tx' + (t^2+6)x = 0$ y que además cumplen las condiciones $x(0 = 0$ y $x'(0) = 0$.

5.4 REDUCCIÓN DE ORDEN

Al resolver ecuaciones diferenciales de orden superior, es común preguntarse si ellas pueden de alguna manera ser reducidas a ecuaciones de primer orden, y

además ellas puedan ser resueltas con algunos de los métodos ya estudiados. El objetivo es buscar un método para encontrar soluciones que formen un conjunto fundamental de la ecuación diferencial. Existe un teorema en cuanto se conoce alguna solución particular reduce la ecuación a un orden menor, esto facilita para resolver una ecuación diferencial.

Teorema 5.5. Sea $x_1(t)$ una solución no trivial de la ecuación diferencial ordinaria de orden n

$$a_0(t)\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0.$$

entonces, mediante la transformación $x(t)=x_1(t)v(t)$, la ecuación se reduce a una ecuación diferencial de orden $(n-1)$.

Demostración. Para facilitar su compresión, la demostración lo haremos para el caso de una ecuación diferencial de segundo orden $(n=2)$. Es decir, para la ecuación

$$a_0(t)\frac{d^2x}{dt^2}+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_2(t)x=0\,. \qquad (4)$$

A fin de encontrar una segunda solución, aplicamos un método de variación de parámetros que se debe a D'Alembert. La idea fundamental es la siguiente: debido a que la ecuación es lineal, y dado que $x_1(t)$ es solución, entonces $cx_1(t)$ para c constante, también es solución. Por tanto la pregunta natural es ¿Cómo encontrar una función $v(t)$, de tal manera que $x_2(t)=v(t)x_1(t)$ también sea solución de la ecuación?

Para el desarrollo de la idea de D'Alembert, utilizamos la transformación $x_2(t)=v(t)x_1(t)$ donde la idea es encontrar $v(t)$; diferenciamos dos veces

$$x'_2(t)=x_1(t)v'(t)+x_1{}'(t)v(t),$$

$$x''_2(t)=x_1(t)v''(t)+2x_1{}'(t)v'(t)+x''_1(t)v(t),$$

remplazando x_2, x'_2, x''_2 en (4) y agrupando términos se tiene,

$$a_0(t)[x_1(t)v''(t)+2x_1{}'(t)v'(t)+x''_1(t)v(t)]+a_1(t)[x_1(t)v'(t)+x_1{}'(t)v(t)]$$
$$+a_2(t)x_1(t)v(t)=0\,,$$

de donde se obtiene,

$$a_0(t)x_1(t)v''(t)+[2a_0(t)x'_1+a_1(t)x_1(t)]v'(t)+$$
$$[a_0(t)x''_1(t)+a_1(t)x'_1(t)+a_2(t)x_1(t)]v(t)=0.$$

En vista de que $x_1(t)$ es solución de la ecuación diferencial (4), el último término se hace cero y se simplifica,

$$a_0(t)x_1(t)v''(t)+[2a_0(t)x'_1+a_1(t)x_1(t)]v'(t)=0\,, \qquad (5)$$

ahora haciendo $u=\frac{dv}{dt}$ la ecuación (5) se reduce,

$$a_0(t)x_1(t)u'(t) + [2a_0(t)x'_1 + a_1(t)x_1(t)]u(t) = 0. \qquad (6)$$

Por lo tanto, resulta una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden que tiene como variable dependiente u. Ahora veamos la consistencia de la ecuación (6), al ser de variable separable se escribe,

$$\frac{du}{u} = -\left[2\frac{x_1'(t)}{x_1(t)} + \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\right]dt,$$

integrando en ambos miembros,

$$\int \frac{du}{u} = -\int^t \left[2\frac{x_1'(s)}{x_1(s)} + \frac{a_1(s)}{a_0(s)}\right]ds + k,$$

siendo k una constante arbitraria, la solución es

$$u(t) = exp\left[-2ln(x_1(t)) - \int^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds + k\right],$$

como estamos interesados en la constante, sea $k = 0$, entonces

$$u(t) = \frac{1}{(x_1(t))^2}exp\left[-\int^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds\right] = r(t),$$

lo cual existe en vista de $x_1(t) \neq 0$, y $a_1(t), a_0(t)$ son funciones continuas en el intervalo $\langle a, b\rangle$. Deshaciendo el cambio,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{(x_1(t))^2}exp\left[-\int^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds\right] = r(t),$$

al ser de variable separable es inmediato,

$$v(t) = \int^t r(s)ds + c,\ c = 0$$
$$= \int^t r(s)ds\,.$$

Por tanto, la solución buscada se escribe $x_2(t) = x_1(t)\int^t r(s)ds$. Finalmente, se verifica que las soluciones $x_1(t)$ y $x_1(t)v(t)$ son linealmente independientes, para esto es suficiente determinar el Wronskiano,

$$W(x_1, x)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_1(t)v(t) \\ x_1'(t) & x_1(t)v'(t) + x'_1(t)v(t) \end{vmatrix}$$
$$= v'(t)[x_1(t)]^2 = exp\left[-\int^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds\right] \neq 0.$$

Al ser distinta de cero en $t \in \langle a, b\rangle$, se cumple la independencia lineal, de manera que estas dos funciones forman el espacio de soluciones de la ecuación diferencial, por lo tanto la solución general se escribe,

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_1(t)\int^t r(s)ds.\blacksquare$$

Ejemplo 8. Considerando que $x_1(t) = t^{-2}$ es solución de la ecuación diferencial

$$t^2x'' - 7tx' - 20x = 0,$$

obtener una solución linealmente independiente reduciendo de orden. Escribir la solución general en el intervalo $\langle 0, +\infty\rangle$.

Solución. En efecto $x_1(t) = t^{-2}$ es solución de la ecuación diferencial al satisfacer

$$t^2(6t^{-4}) - 7t(-2t^{-3}) - 20t^{-2} \equiv 0\,,\ \forall t \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Para encontrar una segunda solución, sea $x_2(t) = t^{-2}v(t)$ y derivamos dos veces para obtener,

$$x'_2(t) = -2t^{-3}v(t) + t^{-2}v'(t),$$
$$x''_2(t) = 6t^{-4}v(t) - 4t^{-3}v'(t) + t^{-2}v''(t),$$

sustituyendo $x_2(t), x'_2(t), x''_2(t)$ en la ecuación diferencial se obtiene,

$$t^2(6t^{-4}v(t) - 4t^{-3}v'(t) + t^{-2}v''(t)) - 7t(-2t^{-3}v(t) + t^{-2}v'(t) - 20t^{-2}v(t) = 0$$

simplificando se reduce a

$$v''(t) + (-11t^{-1})v'(t) = 0,$$

haciendo $u = v'(t)$, la ecuación se reduce a primer orden y separable,

$$u' - 11t^{-1}u = 0,$$

integrando $\int \frac{du}{u} = 11 \int^t \frac{ds}{s}$ de donde $u(t) = t^{11}$, ahora deshaciendo el cambio $u = \frac{dv}{dt}$, obtiene,

$$\frac{dv}{dt} = t^{11} \text{ es decir } v = \frac{1}{12}t^{12}.$$

Por lo tanto una segunda solución es $x_2(t) = t^{-2}\left(\frac{t^{12}}{12}\right) = \frac{1}{12}t^{10}$, de manera que las funciones t^{-2} y t^{10} forman una base, y la solución general de la ecuación diferencial se escribe como la combinación lineal de las funciones donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

$$x(t) = c_1t^{-2} + c_2t^{10}. \blacksquare$$

Para cualquier duda se puede verificar que el sistema fundamental de soluciones $\{t^{-2}, t^{10}\}$ es linealmente independiente, pues al ser

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} t^{-2} & t^{10} \\ -2t^{-3} & 10t^9 \end{vmatrix} = 12t^7 \neq 0 \text{ en } t \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Ejemplo 9. Considerando que $x_1(t) = \cos(\ln(t))$ es solución de la ecuación diferencial

$$t^2x'' + tx' + x = 0,$$

obtener una solución linealmente independiente reduciendo de orden. Escribir la solución general en el intervalo $\langle 0, +\infty \rangle$.

Solución. En efecto $x_1(t) = \cos(\ln(t))$ es solución de la ecuación diferencial al satisfacer

$$t^2\left(\frac{sen(\ln(t)) - \cos(\ln(t))}{t^2}\right) + t\left(-\frac{sen(\ln(t))}{t}\right) + \cos(\ln(t)) \equiv 0\,,\ \forall t \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Para encontrar una segunda solución, sea $x_2(t) = v(t)cos(\ln(t)$ y derivamos dos veces para obtener,

$$x'_2(t) = -\frac{sen(\ln(t))}{t}v(t) + v'(t)\cos(\ln(t)),$$

$$x''_2(t) = \frac{sen(\ln(t)) - \cos(\ln(t))}{t^2}v(t) - \frac{2sen(\ln(t))}{t}v'(t) + v''(t)\cos(\ln(t)),$$

sustituyendo $x(t), x'(t), x''(t)$ en la ecuación diferencial se obtiene,

$$t^2\left(\frac{sen(\ln(t)) - \cos(\ln(t))}{t^2}v(t) - \frac{2sen(\ln(t))}{t}v'(t) + v''(t)\cos(\ln(t))\right) +$$

$$t\left(-\frac{sen(\ln(t))}{t}v(t) + v'(t)\cos(\ln(t))\right) + \cos(\ln(t)) = 0$$

simplificando se reduce a

$$v''(t)t^2\cos(\ln(t)) + t(\cos(\ln(t)) - 2sen(\ln(t))v'(t) = 0,$$

haciendo $u = v'(t)$, la ecuación se reduce a primer orden y separable,

$$u' + \frac{1}{t}\left[1 - 2\frac{sen(\ln(t))}{\cos(\ln(t))}\right]u = 0,$$

integrando

$$\int \frac{du}{u} = -\int^t \frac{ds}{s} + \int \frac{2sen(\ln(t))}{tcos(\ln(t))},$$

de donde $u(t) = t^{-1}(\cos(\ln(t)))^{-2}$, ahora deshaciendo el cambio $u = \frac{dv}{dt}$, obtiene,

$$\frac{dv}{dt} = t^{-1}(\cos(\ln(t)))^{-2}$$

es decir $v = \int \frac{1}{tcos^2(\ln(t))}dt = \tan(\ln(t))$.

Por lo tanto, una segunda solución es $x_2(t) = \cos(\ln(t)).\tan(\ln(t) = sen(\ln(t))$, de manera que las funciones $\cos(\ln(t))$ y $sen(\ln(t))$ forman una base, y la solución general de la ecuación diferencial se escribe como la combinación lineal de las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

$$x(t) = c_1\cos(\ln(t)) + c_2 sen(\ln(t)) \;. \blacksquare$$

Para salir de duda se puede verificar que el sistema fundamental de soluciones $\{\cos(\ln(t)), sen(\ln(t))\}$ es linealmente independiente, pues al ser

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} \cos(\ln(t)) & sen(\ln(t)) \\ -\frac{1}{t}sen(\ln(t)) & \frac{1}{t}\cos(\ln(t)) \end{vmatrix} = \frac{1}{t} \neq 0 \text{ en } t \in \langle 0, +\infty\rangle.$$

Ejemplo 10. Demostrar que si $u(t)$ es solución de la ecuación diferencial

$$a_0(t)\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)x = 0\,, \qquad (7)$$

y $v(t)$ es solución de

$$a_0(t)\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)x = F(t). \qquad (8)$$

Entonces $u(t) + v(t)$ es también solución de la ecuación (8).

Demostración. Como u es solución de (7), entonces satisface esta ecuación, es decir

$$a_0(t)\frac{d^2u}{dt^2}+a_1(t)\frac{du}{dt}+a_2(t)u=0.$$

De la misma forma, si v es solución de (8), entonces satisface esta ecuación, es decir

$$a_0(t)\frac{d^2v}{dt^2}+a_1(t)\frac{dv}{dt}+a_2(t)v=F(t).$$

Supongamos que $x(t)=u(t)+v(t)$ es solución de la ecuación no homogénea (8), entonces reemplazamos, $x'(t)=u'(t)+v'(t)$, $x''(t)=u''(t)+v''(t)$ en (8) resulta,

$$a_o(t)[u''(t)+v''(t)]+a_1(t)[u'(t)+v'(t)]+a_2(t)[u(t)+v(t)]=F(t),$$

de donde se cumple idénticamente que

$$\left[a_0(t)\frac{d^2u}{dt^2}+a_1(t)\frac{du}{dt}+a_2(t)u\right]+\left[a_0(t)\frac{d^2v}{dt^2}+a_1(t)\frac{dv}{dt}+a_2(t)v\right]\equiv F(t). \blacksquare$$

5.5 CASO ESPECIAL DE REDUCCIÓN DE ORDEN

Existen dos casos importantes de ecuaciones de segundo orden que puede resolverse fácilmente por reducción de orden.

CASO 1: AUSENCIA DE LA VARIABLE DEPENDIENTE

Si x no aparece explícitamente en la ecuación diferencial, es decir se tiene $f(t,x',x'')=0$, en este caso, se introduce el cambio de variable $u=x'$ con $u'=x''$, así esta sustitución transforma a una ecuación diferencial de primer orden $g(t,u,u')=0$. Por lo tanto, si logramos encontrar una solución para esta ecuación, se sustituye en ella $u=x'$, para resolver la ecuación diferencial planteada inicialmente.

Ejemplo 11. Obtener la solución general de la ecuación diferencial $tx''-x'=3t^2$.

Solución. Vemos que la variable x está ausente, de manera que al hacer $u=x'$ se obtiene la ecuación,

$$tu'-u=3t^2,$$

es decir, $\frac{du}{dt}+\left(-\frac{1}{t}\right)u=3t$ que como se sabe es una ecuación lineal de primer orden, que tiene como solución,

$$u(t)=3t^2+c_1t.$$

Pero como, $u = x'$, resulta que tenemos una ecuación separable $x' = 3t^2 + c_1 t$, directamente integrando la solución general es,

$$x(t) = t^3 + \frac{c_1}{2}t^2 + c_2 \,. \blacksquare$$

CASO 2: AUSENCIA DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

Si t no está presente en la ecuación; es decir, se tiene la ecuación

$$f(x, x', x'') = 0,$$

en este caso, del mismo modo que en el caso anterior, se introduce el cambio de variable $u = x'$ con $u' = x''$ expresados en términos de una derivada respecto de x,

$$x'' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}.\frac{dx}{dt} = u.\frac{du}{dx},$$

la sustitución transforma a una ecuación diferencial de primer orden $g\left(x, u, u\frac{du}{dx}\right) = 0$. Por lo tanto, se trata de resolver, y se sustituye en ella $u = x'$, para obtener la solución final.

Ejemplo 12. Obtener la solución general de la ecuación diferencial $x'' + c^2 x = 0$, siendo c es una constante real.

Solución. Haciendo el cambio de $u = x'$, la ecuación diferencial se transforma en,

$$\frac{du}{dt} + c^2 x = 0\,,$$

es decir $u\frac{du}{dx} + c^2 x = 0$ una ecuación de primer orden de variable separable, entonces integrando,

$$\int u du = c^2 \int x dx + c_1\,,$$

$$\frac{1}{2}u^2 = -\frac{c^2}{2}x^2 + k\,,$$

si $2k = c_1^2$, y considerando que $u = x'$ se obtiene la ecuación diferencial,

$$x' = \pm\sqrt{c_1^2 - c^2x^2},$$

al ser una ecuación de variable separable, integrando nuevamente,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c_1^2 - c^2x^2}} = \pm\int dt$$

$$\frac{1}{c}arcsen\left(\frac{cx}{c_1}\right) = \pm t + c_2\,,$$

despejando x resulta, $x(t) = \frac{c_1}{c}[sen(\pm ct + cc_2)]$, renombrando las constantes por $a = \frac{c_1}{c}$, $b = cc_2$, la solución general se escribe,

$$x(t) = asen(ct + b)\,. \blacksquare$$

Ejemplo 13. Resolver $x'' = (x')^3\ln(x)$.

Solución. No está presente la variable t, luego haciendo $x' = u$, es decir

$$x'' = \frac{du}{dx}.\frac{dx}{dt} = x'.\frac{du}{dx},$$

la ecuación se transforma en

$$u\frac{du}{dx} = u^3\ln(x),$$

al ser una ecuación separable, integrando

$$\int \frac{du}{u^2} = \int ln(x)dx + c_1,$$

es decir $-\frac{1}{u} = xln(x) + c_1$, y como $x' = u$, integramos nuevamente,

$$-\int dt = \int (xln(x) + c_1)dx + c_2 ,$$

Por lo tanto, la solución general es

$$t = c_1x + c_2 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln(x) . \blacksquare$$

PROBLEMAS 5.2

1. Determine la solución general de la ecuación diferencial dada, asumiendo que $x_1(t)$ es una solución de ella:
   a) $x'' + 4x' + 13x = 0;\ x_1(t) = e^{-2t}\cos(3t)$.
      R. $x(t) = e^{-2t}(c_1\cos(3t) + c_2sen(3t))$.
   b) $t^2x'' - 6tx' + 10x = 0;\ x_1(t) = t^2$.
      R. $x(t) = c_1t^2 + c_2t^5$.
   c) $t^2x'' - tx' - 3x = 0;\ x_1(t) = t^{-1}$.
      R. $x(t) = c_1t^{-1} + c_2t^3$.
   d) $t^2x'' - (t+2)tx' + (t+2)x = 0\ ;\ x_1(t) = t$.
      R. $x(t) = c_1t + c_2te^t$.
   e) $t^2x'' + 8tx' + 12x = 0;\ x_1(t) = t^{-3}$.
      R. $x(t) = c_1t^{-3} + c_2t^{-4}$.
   f) $-t^2x'' + tx' + 8x = 0;\ x_1(t) = t^4$.
      R. $x(t) = c_1t^4 + c_2t^{-2}$.
   g) $(1-t)x'' + tx' - x = 0;\ x_1(t) = t$.
      R. $x(t) = c_1t + c_2e^t$.
   h) $tx'' + 2x' + tx = 0;\ x_1(t) = \frac{sen(t)}{t}$.
   i) $t^2(lnt - 1)x'' - tx' + x = 0;\ x_1(t) = t$.
      R. $x(t) = c_1t + c_2\ln(t)$.

j) $tx'' - (2t+1)x' + (t+1)x = 0;\ x_1(t) = e^t$.

R. $x(t) = e^t(c_1 + c_2t^2)$.

k) $tx'' + (t-1)x' - x = 0;\ x_1(t) = e^{-t}$.

R. $x(t) = c_1e^{-t} + c_2(t-1)$.

l) $t^2x'' + t^3x' - 2(1+t^2)x = t;\ x_1(t) = t^2$.

2. Dado que $x_1(t) = e^{2t}$ es una solución de la ecuación diferencial $4x = (4t+4)\frac{dx}{dt} - (2t+1)\frac{d^2x}{dt^2}$; halle una solución linealmente independiente reduciendo de orden. Escribir la solución general.

R. $x(t) = c_1e^{2t} + c_2(-1-t), t \in \langle -\infty, -\frac{1}{2}\rangle \cup \langle -\frac{1}{2}, +\infty\rangle$.

3. Siendo $x_1(t) = t$ una solución de la ecuación $2x = 2tx' + (t^2-1)x''$, encontrar una segunda solución linealmente independiente en $-1 < t < 1$. Escribe la solución general.

R. $x(t) = c_1t + c_2\left[\frac{t}{2}ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1\right]$.

4. Dado que $x_1(t) = t+1$ es una solución de la ecuación diferencial $tx'' - (t+1)x' + x = 0$, encontrar la otra solución y escribe la solución general de la ecuación diferencial $tx'' - (t+1)x' + x = t^2e^{2t}$.

5. Dado que $x_1(t) = sen(lnt)$ es una solución de la ecuación diferencial $t^2x'' + tx' + x = 0$, encuentre la otra solución linealmente independiente con $x_1(t)$.

R. $x_2(t) = \cos(lnt)$.

6. Dado que $x_1(t) = t^2$ es una solución de la ecuación diferencial $t^2x'' - 4tx' + 6x = 0$, encuentre la otra solución linealmente independiente con $x_1(t)$.

R. $x_2(t) = t^3$.

7. Resuelve cada una de las ecuaciones.

a) $(x')^2 + xx'' = 0$.

b) $2tx'' - x' = -\frac{1}{x'}, t \neq 0$.

R. $x(t) = \pm\frac{2}{3}(1+c_1t)^{\frac{3}{2}} + c_2$, solución de equilibrio $x(t) = \pm t + c_2$.

c) $4t = x' + tx''$.

d) $2xx' - (x')^2 = 1$.

R. $x(t) = \frac{1}{4} + \frac{c_1}{4}(t+c_2)^2$.

e) $(x')^2 = t^2x'' - 2tx'$.

f) $tx''' = 1 - x''$.

g) $1 = -(x')^2 - xx''$.

h) $1 = x'x'', x(0) = 5, x'(0) = 1$.

i) $t^2 = 1 - t^2x''$, $x(1) = 1, x'(1) = 0$.

j) $x' = \sqrt{(1 + (x')^2)^3}$.

k) $t^2x'' = 1 - t$.

R. $x(t) = c_1t - (t - 1)ln|t| + c_2$.

l) $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$.

R. $c - y^2 = (x + k)^2$.

8. En mecánica cuántica, cuando se estudia la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno, nos lleva a una ecuación tipo Laguerre $tx'' + (1 - t)x' + \lambda x = 0$, para $t > 0$ y parámetro λ. Encuentre una segunda solución linealmente independiente a $x_1(t) = 2 + 4t + t^2$, considere $\lambda = 2$.
9. En física matemática, existen problemas con simetría esférica que es el estudio de la ecuación de Legendre, $(1 - t^2)x'' - 2tx' + \lambda(\lambda + 1)x = 0$, donde λ es un parámetro y t es positivo; si $x_1(t) = t$ es una solución de esta ecuación, obtener la solución general para $\lambda = 1$.
10. En mecánica cuántica el estudio de la ecuación de Schrödinger en el caso de un oscilador armónico, lleva a una de tipo Hermite, $x'' - 2tx' + \rho x = 0$, donde ρ es un parámetro; si $x_1(t) = 1 - 2t^2$ es una solución, obtener un segunda solución linealmente independiente con $x_1(t)$ para $\rho = 4$.
11. La ecuación diferencial de Bessel es $t^2x'' + tx' + (t^2 - \rho^2)x = 0$, para el caso en que $\rho = \frac{1}{2}$, se verifica que $x_1 = t^{-1/2}sent$ es una solución sobre cualquier intervalo, para $t > 0$. Halle la solución general.
12. Determine una segunda solución de $(1 - 2t - t^2)x'' + 2(1 + t)x' - 2x = 0$, si una solución es $x_1(t) = t + 1$.

    R. $x_2(t) = (t + 1)\left[t + \frac{\sqrt{2}}{2}Ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|\right] + k$.

5.6 ECUACIÓN DE SEGUNDO ORDEN

Nuestro interés son las ecuaciones de segundo orden, de manera que daremos más detalles sin perder generalidad, formulamos algunos teoremas al respecto.

Sean $p, q, f: \langle a, b\rangle \to IR$ funciones continuas definidas en el intervalo abierto $\langle a, b\rangle$ el cual puede ser infinito o finito, la ecuación de segundo orden en su forma normalizada se escribe

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t). \qquad (9)$$

Definición 5.6. Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea,

$$a_0(t)\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \qquad \text{(r)}$$

y la ecuación no homogénea

$$a_0(t)\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=F(t). \quad \text{(s)}$$

Tenemos: (i) La solución general de (r) se llama función complementaria (solución de la parte homogénea), se denota por $x_c(t)$ o $x_h(t)$; (ii) Cualquier solución de (s) que no contenga constantes arbitrarias se llama integral particular de (s), se denota por $x_p(t)$; (iii) La solución general de (s) se escribe $x(t)=x_c(t)+x_p(t)$. Estudiamos las ecuaciones de orden dos.

Teorema 5.6. (Existencia) Sean p,q y f funciones continuas en $\langle a,b\rangle$. Si $t_0\epsilon\langle a,b\rangle$ y si x_0 y v_0 son números cualesquiera, entonces el problema de valores iniciales

$$\begin{array}{c} x''+p(t)x'+q(t)x=f(t) \\ x(t_0)=x_0, x'(t_0)=v_0 \end{array},$$

tiene una y sólo solución $x(t)$ en $\langle a,b\rangle$.

Demostración. La correspondiente ecuación homogénea es si $f\equiv 0$ en $\langle a,b\rangle$ de manera que la ecuación queda reducida a

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0, \qquad (10)$$

supongamos que $x_h(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ es la solución general de (10) y $x_p(t)$ es una solución particular de (9). Si $x(t)$ es una solución es una solución cualquiera de (9), entonces $u(t)=x(t)-x_p(t)$ es una solución de (10), se justifica

$$\begin{aligned} u''+p(t)u'+q(t)u &= \left(x''(t)-x''_p(t)\right)+p(t)\left(x'(t)-x'_p(t)\right) \\ &\quad +q(t)\left(x(t)-x_p(t)\right) \\ &= x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)-\left[x''_p(t)+p(t)x'_p(t)+q(t)x_p(t)\right] \\ &\equiv f(t)-f(t)\equiv 0, \end{aligned}$$

como $x_h(t)$ es la solución general de (10) resulta que

$$u=x_h(t)$$

es decir $x(t)=x_h(t)+x_p(t)$. ■

Finalmente para una elección apropiada de las constantes c_1 y c_2. Esto indica que si queremos resolver la ecuación diferencial (9) se tiene que hallar las dos partes $x_h(t)$ y $x_p(t)$.

Dada la ecuación

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0,$$

lo primero que observamos es que admite como solución a la función $x(t) \equiv 0$ en $\langle a, b\rangle$, además el conjunto formado por todas soluciones de (10) es un espacio vectorial.

Teorema 5.7. Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones cualesquiera de (10), entonces; $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ también es solución para cada par de constantes c_1 y c_2.

Demostración. Sea $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ c_1 y c_2 son constantes, entonces

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = [c_1x''_1(t) + c_2x''_2(t)] + p(t)[c_1x'_1(t) + c_2x'_2(t)]$$
$$+q(t)[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)]$$
$$\equiv c_1[x''_1(t) + p(t)x'_1(t) + q(t)x_1(t)] + c_2[x''_2(t) + p(t)x'_2(t) + q(t)x_2(t)]$$
$$\equiv c_1.0 + c_2.0 \equiv 0,$$

con lo cual queda demostrado el teorema.■

Observemos que, dado $t_0 \in \langle a, b\rangle$ por el teorema 5.6, los siguientes problemas de valores iniciales

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$$
$$x(t_0) = 1\,, \qquad x'(t_0) = 0$$

y

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$$
$$x(t_0) = 0\,,\ x'(t_0) = 1 \quad ,$$

tienen una única solución $x_1(t)$ y $x_2(t)$ respectivamente. Además $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ con c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, es una solución de la ecuación (10).

Teorema 5.8. Si $x(t)$ es una solución de (10) entonces existen c_1 y c_2 constantes tal que

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t), \forall t \in \langle a, b\rangle.$$

Demostración. Sea $x(t)$ una solución de (10), y consideremos $c_1 = x(t_0)$ y $c_2 = x'(t_0)$. Entonces,

$$z = x - c_1x_1 - c_2x_2\,,$$

es solución del problema de valor inicial

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$$
$$x(t_0) = 0\,,\ x'(t_0) = 0 \quad .$$

Luego, por el teorema 5.6, $z(t) \equiv 0$ en $\langle a, b\rangle$. ■

Entonces se observa que el espacio de soluciones de (10) está generado por $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Es decir $\{x_1(t), x_2(t\}$ es una *base* del *espacio de soluciones*.

El siguiente paso que debemos dar es buscar algún criterio que nos permita decidir dos soluciones de (10) son linealmente independientes, esto es para

formar una base, que el sistema fundamental de soluciones y permita formula la solución general.

Teorema 5.9. Sean $x_1, x_2: \langle a, b\rangle \to IR$ dos funciones derivables tales que existe $t_0 \in \langle a, b\rangle$ para el cual $w(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$. Entonces x_1 y x_2 son linealmente independientes.

Demostración. Es conveniente hacer por contradicción. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ linealmente dependientes, entonces existen constantes c_1 y c_2 distinto de cero tales que

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = 0 \,, \forall t \in \langle a, b\rangle \,,$$

y derivando

$$c_1 x'_1(t) + c_2 x'_2(t) = 0 \,, \forall t \in \langle a, b\rangle \,.$$

El determinante de este sistema es por hipótesis, $w(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$, lo que significa que

$$c_1 = \frac{0}{w(x_1, x_2)(t)} = 0 \text{ y } c_2 = \frac{0}{w(x_1, x_2)(t)} = 0,$$

lo cual es una contradicción. ■

Teorema 5.10. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones de (10). Entonces, las soluciones son linealmente independientes si y sólo si $t_0 \in \langle a, b\rangle$ tal que $w(x_1, x_2)(t_0 \neq 0$. Además, si $w(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$ entonces $w(x_1, x_2)(t) \neq 0$ en $\langle a, b\rangle$.

Demostración. Primero que x_1 y x_2 son linealmente independiente entonces existe $t_0 \in \langle a, b\rangle$ de manera que $w(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$, lo que se va extender para, $w(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$ para todo $t \in \langle a, b\rangle$.

Sea $t_0 \in \langle a, b\rangle$ entonces probaremos que $w(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$. Asumamos que no, entonces el sistema,

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = 0,$$
$$c_1 x'_1(t) + c_2 x'_2(t) = 0,$$

tienen solución c_1 c_2 no trivial. Sea $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$. Hay que observar que $x(t)$ es una solución del problema de valores iniciales

$$\begin{matrix} x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \\ x(t_0) = 0 \,, \; x'(t_0) = 0 \end{matrix} \,,$$

y por el teorema 5.6 resulta que $x(t) \equiv 0$ en $\langle a, b\rangle$, esto implica que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son linealmente dependientes lo que es una contradicción. La recíproca es una consecuencia del teorema 5.8, la última afirmación del teorema se prueba de la siguiente manera. Si el Wronskiano es diferente de cero en un punto, entonces $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son linealmente independiente lo que implica que el Wronskiano es no nulo en todo $\langle a, b\rangle$.■

Teorema 5.11. Sean $x_1, x_2: \langle a, b\rangle \to IR$ dos soluciones linealmente independientes de (10). Entonces, cualquier solución de x de (10) es de la forma

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t),$$

donde c_1 y c_2 son constantes que se escogen de manera conveniente.

Demostración. Sea $t_0 \in \langle a, b\rangle$ fijo y consideremos el sistema

$$c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) = x(t_0)$$
$$c_1x'_1(t_0) + c_2x'_2(t_0) = x'(t_0)’$$

Se observa que el determinante de este sistema es

$$w(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$$

ya que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son linealmente independiente. Entonces, el sistema tiene solución única. Por otro lado, sea

$$z(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t\ ,$$

se obtiene que $z(t)$ es solución de (10) y $z(t_0) = x(t_0)$ y $z'(t_0) = x'(t_0)$. Por el teorema 5.6, se tiene que $z(t) = x(t)$ en $\langle a, b\rangle$. ■

5.7 ECUACIÓN LINEAL HOMOGÉNEA CON COEFICIENTES CONSTANTES

En esta sección estudiaremos un método elaborado por *Euler* para la búsqueda de las soluciones de una ecuación lineal, el objetivo es determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, pero que tengan coeficientes constantes; es decir,

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_nx = 0, \qquad (11)$$

precisamente aquí los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son constantes reales. En la ecuación vemos cada derivada está multiplicada por una constante, esto indica que la solución buscada también adopta la misma forma; es decir buscamos una función $x(t)$ que cumpla

$$\frac{d^k}{dt^k}[x(t)] = cx(t), \ \ \forall t.$$

La función con esta propiedad es del tipo exponencial, es decir $x(t) = e^{rt}$ con r constante, y $e^{rt} \neq 0, \ \forall r, t \in IR$; en adelante, es sencillo justificar que es cierto,

$$\frac{d^k}{dt^k}[e^{rt}] = r^ke^{rt}, \ \ \forall t.$$

Entonces, asumiendo que la solución que buscamos es de la forma $x(t) = e^{rt}$, derivamos tantas veces,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = re^{rt} \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = r^2e^{rt} \\ \quad \cdots \\ \dfrac{d^kx}{dt^k} = r^ke^{rt} \\ \quad \cdots \\ \dfrac{d^nx}{dt^n} = r^ne^{rt} \end{cases} \qquad (12)$$

reemplazando (12) en la ecuación (11), se obtiene

$$a_0r^ne^{rt} + a_1r^{n-1}e^{rt} + a_2r^{n-2}e^{rt} + \cdots + a_{n-1}re^{rt} + a_ne^{rt} = 0,$$

es decir,

$$e^{rt}[a_0r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \cdots + a_{n-1}r + a_n] = 0,$$

como $e^{rt} \neq 0$, resulta la ecuación polinómica donde la variable a encontrar es r,

$$P(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0\,,$$

y, se llama *ecuación auxiliar* o *ecuación característica* de le ecuación (11). Por lo tanto, las soluciones que buscamos $x(t) = e^{rt}$ dependen de las raíces r que resultan de la ecuación auxiliar, según cómo sean las raíces se desprenden tres casos.

Teorema 5.12. Sea la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes y de orden n,

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_nx = 0, \qquad (13)$$

con $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ constantes. Si la ecuación características tiene n raíces $r_1, r_2, \dots, r_n$ distintas, entonces la solución general de (13) está dado por

$$x(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} + c_3e^{r_3t} + \cdots + c_ne^{r_nt},$$

con $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ constantes arbitrarias.

Demostración. En vista de que las raíces $r_1, r_2, \dots, r_n$ son todas reales distintas, entonces las funciones $x_1(t) = e^{r_1t}, x_2(t) = e^{r_2t}, \dots, x_n(t) = e^{r_nt}$ deben formar un conjunto linealmente independiente, es decir, que el sistema fundamental de soluciones es

$$\{e^{r_1t}, e^{r_2t}, \dots, e^{r_nt}\},$$

válido en $-\infty < t < +\infty$, y por tanto, la solución general es la combinación lineal de estas funciones,

$$x(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} + c_3e^{r_3t} + \cdots + c_ne^{r_nt},$$

con $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ constantes arbitrarias. Para que la solución sea válida se tendría que justificar la independencia lineal de las soluciones, y lo hacemos aplicando el Wrosnkiano,

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} & \dots & e^{r_n t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} & \dots & r_n e^{r_n t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 t} & r_2^{n-2} e^{r_2 t} & \dots & r_n^{n-1} e^{r_n t} \end{vmatrix},$$

se podría elegir un valor para t el más sencillo es tomar $t = 0$, así el Wronskiano en cero es,

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-2} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

lo cual es la determinante de Vandermonde donde las entradas de cada columna es una progresión geométrica,

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(0) = [(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) \dots (r_n - r_1)][(r_3 - r_2) \dots (r_n - r_2)]$$
$$\dots [(r_{n-1} - r_{n-2})(r_n - r_{n-2})][(r_n - r_{n-1})] \neq 0,$$

ningún factor es cero, dado que las todas las raíces son distintas de cero. Por lo tanto las funciones $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_n t}$ son linealmente independientes.

Teorema 5.13. Sea la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes y de orden n,

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0,$$

con $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ constantes. Si la ecuación características tiene a r_1 como raíz real con orden de multiplicidad n, entonces la solución general está dado por

$$x(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_n t^{n-1}) e^{r_1 t},$$

con $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ constantes arbitrarias.

Demostración. La demostración se puede hacer por inducción, haremos para el caso de una ecuación de segundo orden,

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0\,,$$

se asume como ecuación auxiliar $a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ que tiene una raíz doble $r = r_1$; al ser una solución doble se cumple que $2a_0 r_1 + a_1 = 0$. Es decir se conoce una solución y es $x_1(t) = e^{r_1 t}$, ahora buscamos una segunda solución que sea linealmente independiente con $x_1(t)$. Aplicamos el teorema de reducción de orden para obtener una segunda solución y es $x_2(t) = v(t)x_1(t)$, sea entonces

$$x_2(t) = v(t)e^{r_1 t},$$

derivando dos veces,

$$\begin{cases} x'_2(t) = v'(t)e^{r_1 t} + r_1 v(t) e^{r_1 t} \\ x''_2(t) = v''(t)e^{r_1 t} + 2r_1 v'(t)e^{r_1 t} + r_1^2 v(t) e^{r_1 t} \end{cases}$$

sustituyendo $x_2(t)$, $x'_2(t)$ y $x''_2(t)$ en la ecuación diferencial resulta,

$$a_0[v''(t)e^{r_1t} + 2r_1v'(t)e^{r_1t} + r_1^2v(t)e^{r_1t}] + a_1[v'(t)e^{r_1t} + r_1v(t)e^{r_1t}] +$$
$$+a_2v(t)e^{r_1t} = 0$$

de donde,

$$a_0v''(t) + (2a_0r_1 + a_1)v'(t) + (a_0r^2 + a_1r + a_2)v(t) = 0,$$

entonces como $a_0r^2 + a_1r + a_2 = 0$ y $2a_0r_1 + a_1 = 0$, la ecuación se reduce a,

$$a_0v''(t) = 0, a_0 \neq 0.$$

Al ser una ecuación separable, integrando $v'(t) = c$, otra ves $v(t) = ct + k$, sea $c = 1, k = 0$; así resulta que $v(t) = t$. Por lo tanto, una segunda solución es $x_2(t) = te^{r_1t}$, así el conjunto fundamental es

$$\{e^{r_1t}, te^{r_1t}\},$$

veamos la independencia lineal,

$$W(x_1,x_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{r_1t} & te^{r_1t} \\ r_1e^{r_1t} & e^{r_1t} + r_1te^{r_1t} \end{vmatrix} = e^{2r_1t} \neq 0, \forall t\,,$$

al ser linealmente independiente, la solución general está dado por

$$x(t) = c_1e^{r_1t} + c_2te^{r_1t} = (c_1 + c_2t)e^{r_1t}.$$

con c_1, c_2 constantes arbitrarias. ■

Teorema 5.14. Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$a_0\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2x = 0.$$

Si la ecuación auxiliar tiene como raíces complejas conjugadas $r = a \pm bi$, entonces la solución general de ecuación diferencial es

$$x(t) = e^{at}[c_1sen(bt) + c_2\cos(bt)],$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Demostración. En vista de que la ecuación auxiliar tiene dos raíces complejas $r_1 = a + bi, r_2 = a - bi$, donde $a, b \in IR, b \neq 0$; la unidad imaginaria es $i = \sqrt{-1}$, se tiene el sistema fundamental de soluciones,

$$\{e^{(a+bi)t}, e^{(a-bi)t)}\},$$

por tanto, si estas soluciones fueran linealmente independientes, la solución general sería la combinación lineal de ambas soluciones,

$$x(t) = c_1e^{(a+bi)t} + c_2e^{(a-bi)t}. \qquad (14)$$

Pero esta solución no queda así, utilizando la fórmula de Euler lo expresamos de otra forma más conocida, veamos de (14)

$$c_1e^{(a+bi)t} + c_2e^{(a-bi)t} = c_1e^{at}e^{(bi)t} + c_2e^{at}e^{(-bi)t},$$
$$= e^{at}[c_1e^{(bi)t} + c_2e^{(-bi)t}]$$
$$= e^{at}[c_1(\cos(bt) + isen(bt)) + c_2(\cos(-bt) + isen(-bt))],$$

$$= e^{at}[(c_1 + c_2)\cos(bt) + i(c_1 - c_2)sen(bt)],$$

de manera que si acumulamos la constante $k_2 = c_1 + c_2, k_1 = i(c_1 - c_2)$, la solución general se escribe,

$$x(t) = e^{at}[k_1 sen(bt) + k_2\cos(bt)].$$

Naturalmente, que las dos soluciones $x_1(t) = e^{at}sen(bt)$ y $x_2(t) = e^{at}cos(bt)$, son linealmente independientes,

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{at}sen(bt) & e^{at}cos(bt) \\ be^{at}cos(bt) + ae^{at}sen(bt) & -be^{at}sen(bt) + ae^{at}cos(bt) \end{vmatrix}$$

$$= -be^{2at} \neq 0, b \neq 0.\blacksquare$$

Ejemplo 14. Halle la solución general de la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x = 0$.

Solución. La ecuación auxiliar asociada a la ecuación diferencial es

$$r^2 - r - 6 = 0,$$

donde sus raíces son: $r_1 = -2, r_2 = 3$ que son reales distintas, luego el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{-2t}, e^{3t}\}$. Por lo tanto, la solución general está dado por la combinación lineal de estas dos funciones,

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t},$$

con c_1, c_2 constantes arbitrarias.■

Ejemplo 15. Halle la solución general de la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$.

Solución. La ecuación auxiliar asociada a la ecuación diferencial es

$$r^2 + 4r + 4 = 0,$$

donde sus raíces son: $r = r_{1,2} = -2$ que son reales iguales (multiplicidad dos), luego el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{-2t}, te^{-2t}\}$. Por lo tanto, la solución general está dado por la combinación lineal de estas dos funciones,

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t},$$

con c_1, c_2 constantes arbitrarias.■

Ejemplo 16. Obtener la solución general de la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 13x = 0$.

Solución. La ecuación auxiliar asociada a la ecuación diferencial es

$$r^2 + 4r + 13 = 0,$$

donde sus raíces son: $r = -2 \pm 3i$ que son complejas conjugadas, con $a = -2, b = 3$; luego el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{-2t}sen(3t), e^{-2t}\cos(3t)\}$. Por

lo tanto, la solución general está dado por la combinación lineal de estas dos funciones,

$$x(t) = e^{-2t}(c_1 sen(3t) + c_2 \cos(3t)),$$

con c_1, c_2 constantes arbitrarias.■

Ejemplo 17. Sea la ecuación diferencial $9\frac{d^3x}{dt^3} - 15\frac{d^2x}{dt^2} + 7\frac{dx}{dt} - x = 0$, halle la solución general.

Solución. La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$9r^3 - 15r^2 + 7r - 1 = 0,$$

que se puede escribir en la forma $(r-1)\left(r-\frac{1}{3}\right)^2 = 0$, entonces las raíces de la ecuación auxiliar son $r_1 = 1$, $r_{2,3} = \frac{1}{3}$ (multiplicidad dos), por lo que el conjunto fundamental de soluciones es

$$\left\{e^t, e^{\frac{1}{3}t}, te^{\frac{1}{3}t}\right\},$$

por lo tanto, la solución general se escribe,

$$x(t) = c_1e^t + c_2e^{\frac{1}{3}t} + c_3te^{\frac{1}{3}t},$$

para c_1, c_2, c_3 constantes arbitrarias.■

Ejemplo 18. Sea la ecuación diferencial $\frac{d^5x}{dt^5} + 6\frac{d^4x}{dt^4} + 12\frac{d^3x}{dt^3} + 8\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, halle la solución general.

Solución. La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$r^5 + 6r^4 + 12r^3 + 8r^2 = 0,$$

que se puede escribir en la forma $r^2(r+2)^3 = 0$, entonces las raíces de la ecuación auxiliar son $r_{1,2} = 0$ (multiplicidad dos) $r_{3,4,5} = -2$ (multiplicidad tres), esto nos da el conjunto fundamental de soluciones

$$\{1, t, e^{-2t}, te^{-2t}, t^2e^{-2t}\},$$

por lo tanto, la solución general se escribe,

$$x(t) = c_1 + c_2t + (c_3 + c_4t + c_5t^2)e^{-2t},$$

para c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 constantes arbitrarias.■

Ejemplo 19. Sea la ecuación diferencial $\frac{d^4x}{dt^4} - 3\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - x = 0$, halle la solución general.

Solución. La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$r^4 - r^3 + 5r^2 - r - 1 = 0,$$

que se puede escribir en la forma $(r+1)(r-2)(r^2-2r+5)=0$, entonces las raíces de la ecuación auxiliar son $r_1=-1, r_2=2$ (reales distintas) $r_{3,4}=1\pm 2i$ (complejas conjugadas), esto nos da el conjunto fundamental de soluciones

$$\{e^{-t}, e^{2t}, e^{t}sen(2t), e^{t}\cos(2t)\},$$

por lo tanto, la solución general se escribe,

$$x(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}+e^{t}[c_3sen(2t)+c_4\cos(2t)],$$

para c_1, c_2, c_3, c_4 constantes arbitrarias.■

Ejemplo 20. Sea la ecuación diferencial $\frac{d^4x}{dt^4}-8\frac{d^3x}{dt^3}+42\frac{d^2x}{dt^2}-104\frac{dx}{dt}+169x=0$. Escribe la solución general.

Solución. La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$r^4-8r^3+42r^2-104r+169=0,$$

que se puede escribir en la forma $[(r-2)^2+9]^2=0$, entonces las raíces de la ecuación auxiliar son $r_1=2+3i, r_2=2-3i$ (cada uno de multiplicidad dos), luego el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{e^{2t}sen(3t), te^{2t}sen(3t), e^{2t}\cos(3t), te^{2t}\cos(3t)\}.$$

Por lo tanto, la solución general se escribe,

$$x(t)=e^{2t}(c_1+c_2t)sen(3t)+e^{2t}(c_3+c_4t)\cos(3t),$$

para c_1, c_2, c_3, c_4 constantes arbitrarias.■

Ejemplo 21. Resuelve la ecuación diferencial $\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}-2x=0$, sujeta a las condiciones $x(0)=1, x'(0)=0, x''(0)=0$.

Solución. La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$r^3-3r^2+42r^2+4r-2=(r-1)(r^2-2r+2)=0,$$

entonces las raíces de la ecuación auxiliar son: $r_1=1, r_2=1+i, r_3=1-i$, luego el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{e^{t}, e^{t}sen(t), e^{t}\cos(t)\},$$

por lo tanto, la solución general se escribe,

$$x(t)=c_1e^{t}+e^{t}(c_2\cos(t)+c_3sen(t)),$$

para c_1, c_2, c_3, constantes arbitrarias. Aplicando las condiciones iniciales se obtienen $c_1=2$, $c_2=-1$ y $c_3=1$. Por lo tanto, la solución al problema de valor inicial es

$$x(t)=2e^{t}+e^{t}(-\cos(t)+sen(t))\ .\ ■$$

PROBLEMAS 5.3

1. Hallar la solución general de

a) $x'' - 2x' + 2x = 0.$
R. $x(t) = e^{t}(c_1 cost + c_2 sent).$
b) $x'' - 10x' + 25x = 0.$
R. $x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 te^{5t}.$
c) $x''' + 9x' = 0, x(0) = 3, x'(0) = -1, x''(0) = 2.$
R. $x(t) = \frac{29}{9} - \frac{2}{9}\cos(3t) - \frac{1}{3}sen(3t).$
d) $x''' - 3x'' + 3x' - y = 0, x(0) = 2, x'(0) = 0, x''(0) = 0.$
R. $x(t) = e^{t}[2 - 2t + t^2].$
e) $\frac{d^3x}{dt^3} - 6\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} - 8x = 0.$
R. $x(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^{2t}.$

2. Demuestre que, si $r = a \pm bi$ son ambas raíces de multiplicidad n de la ecuación auxiliar $a_0 r^n + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$, entonces la solución general se escribe
$$x(t) = e^{at}(c_1 + c_2 t + \cdots + c_k t^{n-1})sen(bt) + e^{at}(c_{k+1} + c_{k+2} t + \cdots + c_n t^{n-1})cos(bt)\,.$$
3. Demuestre que, si $r = \pm i$ son ambas raíces de multiplicidad n de la ecuación auxiliar $a_0 r^n + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$, entonces la solución general se escribe
$$x(t) = (c_1 + c_2 t + \cdots + c_k t^{n-1})sen(t) + (c_{k+1} + c_{k+2} t + \cdots + c_n t^{n-1})cos(t)\,.$$

5.8 EL MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Este es un método para resolver ecuaciones lineales no homogéneas, básicamente para encontrar la solución particular, sin embargo, tiene limitaciones, ya que se aplica a ciertas clases de funciones que cumplen de ser del tipo coeficientes indeterminados. No obstante, tiene ventaja, cuando el método es pertinente resulta fácil de emplear. El método se aplica únicamente cuando los coeficientes son constantes,
$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = F(t).$$
Su utilización permite construir una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación dada, en general el método trata de encontrar una solución particular del mismo tipo que la función $F(t)$, pero ya requiere haber resuelto la ecuación característica de la parte homogénea asociada y disponer ya del sistema fundamental de soluciones de esa ecuación.

Definición 5.7. Una función es del tipo coeficientes indeterminados (CI) si es de alguna de las formas (i) $ct^n, n = 0,1,2,3,4, \ldots, k, \ldots$; aquí $c \in IR$ (ii) $ke^{at}, a, k \in IR$, (iii) $ksen(at), a \neq 0, k \in IR$, (iv) $kcos(at), a \neq 0, k \in IR$, (v) Producto finito de los cuatro tipos de funciones mencionadas.

Ejemplo 22. La función definida por $F(t) = t^2 e^{-5t} sen(3t)$ es una función tipo coeficiente indeterminado, pues es producto de (i), (ii) y (iii).

Ejemplo 23. La función definida por $G(t) = t^{-2}\tan(t)$ no es una función tipo coeficiente indeterminado, pues no es consecuencia de los cuatro tipo señalados.

Definición 5.8. Sea $F(t)$ una función del CI. El conjunto formado por $F(t)$ y todas las funciones linealmente independientes del tipo CI, de modo que $F(t)$ y sus derivadas, se llaman *conjunto CI* de $F(t)$.

Es sencillo observar que si $F(t)$ es una función de tipo CI, sus derivadas de $F(t)$ también produce funciones del tipo CI, excepto la constante que hace múltiplo.

Ejemplo 24. Hallar el conjunto CI de $F(t) = t^5$.

Solución. La función $F(t) = t^5$ para cada $t \in IR$, ya es una función de tipo CI. Para obtener otras funciones del tipo CI derivamos hasta que no produzca nuevas funciones del tipo CI, tenemos,

$$F'(t) = 5t^4; F''(t) = 20t^3; F'''(t) = 60t^2;\ F^{(4)}(t) = 120t; F^{(5)}(t) = 120;$$
$$F^{(6)}(t) = 0, \text{así } F^{(n)}(t) = 0,\ n > 5,$$

las funciones de tipo CI linealmente independiente que resultan de estas derivadas son (se evita los coeficientes) $1, t, t^2, t^3, t^4$; luego, el conjunto CI de t^5 es,

$$S = \{t^5, t^4, t^3, t^2, t, 1\}. \blacksquare$$

Ejemplo 25. Hallar el conjunto CI de $f(t) = t^2 sen(t)$.

Solución. La función $f(t) = t^2 sen(t)$ para cada $t \in IR$, es un producto de dos funciones de tipo CI definidas por t^2 y $sen(t)$, de manera que $f(t)$ es una función de tipo CI. Para obtener otras funciones del tipo CI derivamos hasta que no produzca nuevas funciones del tipo CI, tenemos,

$$f'(t) = 2tsen(t) + t^2\cos(t); f''(t) = 2sen(t) + 4tcos(t) - t^2 sen(t);$$
$$f'''^{(t)} = 6\cos(t) - 6tsen(t) - t^2 cos(t).$$

Si continuamos derivando al orden superior $n > 3$ ya no surgirán otras funciones de tipo CI linealmente independiente, sólo tenemos seis funciones del tipo CI que son (se evita los coeficientes) $t^2 sen(t), t^2\cos(t), tsen(t), tcos(t); sen(t), \cos(t)$; luego, el conjunto CI de $t^2 sen(t)$ es,

$$S = \{t^2 sen(t), t^2 \cos(t), tsen(t), tcos(t); sen(t), \cos(t)\}.■$$

EL MÉTODO

El método de CI se puede aplicar cuando la función $F(t)$ de la ecuación (1) es una combinación lineal del tipo CI. Ahora explicamos cómo funciona el método para resolver la ecuación diferencial

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = F(t). \qquad (15)$$

Se parte del hecho de que ya se conoce la solución de la ecuación homogénea,

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0,$$

y que está dado por

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) + \cdots + c_n x_n(t). \qquad (16)$$

Debemos hallar una integral particular $x_p(t)$ de la ecuación (15), siempre que $F(t)$ es una combinación lineal finita de funciones $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$ de tipo CI, es decir,

$$F(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \cdots + \alpha_m f_m(t),$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ son constantes conocidas. Seguimos la secuencia:

(a) Para cada una de las funciones del tipo CI $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$ hallamos el correspondiente conjunto CI, obteniendo así los conjuntos,

$$S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, \ldots, S_{j-1}, S_j, S_{j+1}, \ldots, S_{k-1}, S_k, S_{k+1}, \ldots, S_{m-1}, S_m.$$

(b) Supongamos que alguno de los conjuntos CI hallados, tal como el S_j (para poner ejemplos) es idéntico o está incluido en otro digamos S_k. En este caso si son idénticos se toma sólo un conjunto, si está incluido se omite el menor digamos que $S_j \subset S_k$, se omite s_j y queda S_k.

(c) Después de haber analizado (b) los conjuntos CI quedan así,

$$S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, \ldots, S_{j-1}, S_{j+1}, \ldots, S_{k-1}, S_k, S_{k+1}, \ldots, S_{m-1}, S_m.$$

Seguidamente vemos si algunos de estos conjuntos que quedan incluye funciones que son soluciones de la parte homogénea (16), digamos que S_i (para tomar ejemplos), entonces este conjunto se debe modificar, cada miembro de S_i se multiplica por la potencia mínima de t hasta ver el conjunto que resulta ya no contenga a la solución de (16); este conjunto modificado sea S_i^* que se reemplaza a las lista anterior.

(d) Considerando el paso (c) ahora se tiene los conjuntos

$$S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_i^*, S_{i+1}, \ldots, S_{j-1}, S_{j+1}, \ldots, S_{k-1}, S_k, S_{k+1}, \ldots, S_{m-1}, S_m.$$

Con los elementos de estos conjuntos se forma una combinación lineal, justamente los coeficientes son los indeterminados, ya tenemos formulado cómo será la solución $x_p(t)$.

(e) Finalmente hallamos los coeficientes indeterminados reemplazando $x_p(t)$ y sus derivadas para que se cumplan idénticamente en (15), de allí saldrán los coeficientes desconocidos.

Ponemos en práctica el métodos con algunos ejemplos ilustrativos, pero, se recomienda entender bien los pasos explicados, el éxito del método tiene que ver con formar correctamente la solución $x_p(t)$.

Ejemplo 26. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$x'' - x' - 2x - 2e^t = -5sen(t).$$

Solución. Primero debemos hallar la solución de la ecuación homogénea $x'' - x' - 2x = 0$, y la solución es

$$x_h(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}.$$

Al escribir la ecuación como

$$x'' - x' - 2x = 2e^t - 5sen(t), \qquad \text{(p)}$$

el término no homogéneo es $F(t) = 2e^t - 5sen(t)$, que es combinación lineal de las dos funciones del tipo CI dadas por e^t y $sen(t)$. Entonces es aplicable el método, seguimos los pasos.

(a) Formamos el conjunto CI de las funciones e^t y $sen(t)$. Y son: $S_1 = \{e^t\}$, $S_2 = \{sen(t), \cos(t)\}$.

(b) Vemos que $S_1 \not\subset S_2$ 'o $S_2 \not\subset S_1$, tampoco $S_1 = S_2$, por tanto quedan S_1, S_2.

(c) Examinamos la solución $x_h(t)$ y vemos que las funciones $e^t, sen(t), \cos(t)$, no es solución de la ecuación homogénea, por tanto S_1, S_2 no serán modificados.

(d) Con los tres elementos $e^t, sen(t), \cos(t)$, de los conjuntos S_1, S_2, formamos una combinación lineal $Ae^t + Bsen(t) + Ccos(t)$, donde los coeficientes indeterminados son A, B, C.

(e) Formulamos la solución particular buscada

$$x_p(t) = Ae^t + Bsen(t) + Ccos(t)\,. \qquad \text{(p}_1\text{)}$$

Hallamos A, B, C exigiendo que cumpla su condición de solución. Derivando dos veces.

$$\begin{cases} x'_p(t) = Ae^t + Bcos(t) - Csen(t) \\ x''_p(t) = Ae^t - Bsen(t) - Ccos(t) \end{cases},$$

reemplazando $x_p(t), x'_p(t)$ y $x''_p(t)$ en la ecuación (p) se obtiene,

$$(Ae^t - Bsen(t) - Ccos(t) - \left(Ae^t + Bcos(t) - Csen(t)\right),$$

$$-2\big(Ae^t + Bsen(t) + Ccos(t)\big) \equiv 2e^t - 5sen(t),$$

es decir $-2Ae^t + (-3B + C)sen(t) + (-3C - B)\cos(t) \equiv 2e^t - 5sen(t,$ al ser válida para todo $t \in \langle a, b\rangle$, se cumple que

$$-2A = 2;\; -3B + C = -5;\; -3C - B = 0;$$

de donde $A = -1, B = \frac{3}{2}, C = -\frac{1}{2}$. Y así obtenemos la integral particular en (p1),

$$x_p(t) = -e^t + \frac{3}{2}sen(t) - \frac{1}{2}cos(t).$$

Por lo tanto, la solución general escribe como,

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$= c_1e^{2t} + c_2e^{-t} - e^t + \frac{3}{2}sen(t) - \frac{1}{2}cos(t).\blacksquare$$

Ejemplo 27. Resuelve la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} - x = t^2 + 2e^t + te^t - 2e^{2t}$.

Solución. La correspondiente ecuación homogénea es $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$, que tiene como solución

$$x_h(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}.$$

El término no homogéneo es la función $F(t) = t^2 + 2e^t + te^t - 2e^{2t}$, que es combinación lineal de cuatro funciones de tipo CI. Formamos el conjunto CI de cada una las funciones t^2, e^t, te^t, e^{2t} , que respectivamente son: $S_1 = \{t^2, t, 1\}$, $S_2 = \{e^t\}, S_3 = \{te^t, e^t\}$ y $S_4 = \{e^{2t}\}$.

Observamos que $S_2 \subset S_3$, por lo tanto eliminamos el conjunto S_2. Por otro lado $S_3 = \{te^t, e^t\}$ contiene a solución e^t; entonces este conjunto debe ser multiplicado por t (potencia mínima de t), así se tiene un nuevo conjunto $S_3^* = \{t^2e^t, te^t\}$ que ya no incluye a la solución.

Después de los análisis quedan los conjuntos,

$$S_1 = \{t^2, t, 1\}, S_3^* = \{t^2e^t, te^t\}, S_4 = \{e^{2t}\},$$

con los elementos de los conjuntos que quedan formulamos la solución $x_p(t)$ escribiendo la combinación lineal,

$$x_p(t) = At^2 + Bt + C + De^{2t} + Et^2e^t + Fte^t$$

Derivando dos veces

$$x'_p(t) = 2At + B + 2De^{2t} + 2Ete^t + Et^2e^t + Fe^t + Fte^t$$

$$x''_p(t) = 2A + 4De^{2t} + 2Ee^t + 4Ete^t + Et^2e^t + 2Fe^t + Fte^t,$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene,

$$(2A + 4De^{2t} + 2Ee^t + 4Ete^t + Et^2e^t + 2Fe^t + Fte^t) -$$
$$(At^2 + Bt + C + De^{2t} + Et^2e^t + Fte^t) \equiv t^2 + 2e^t + te^t - 2e^{2t},$$

para que se cumpla idénticamente, $-A=1, B=0; 2A-C=0; 2E+2F=2; 4E=1;\ \ 3D=-2$, de donde $A=-1, B=0, C=-2, E=\frac{1}{4}, D=-\frac{2}{3}, F=\frac{3}{4}$. Finalmente, la integral particular es

$$x_p(t)=-t^2-2-\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{4}t^2e^t+\frac{3}{4}te^t.$$

Por lo tanto, la solución general es,

$$x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}-t^2-2-\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{4}t^2e^t+\frac{3}{4}te^t$$

para c_1, c_2 constantes arbitrarias. ■

Ejemplo 28. Resolver la ecuación diferencial $\frac{d^4x}{dt^4}+4\frac{d^2x}{dt^2}=12t^2+8sen(2t)-8\cos(2t)$.

Solución. La correspondiente ecuación homogénea $\frac{d^4x}{dt^4}+4\frac{d^2x}{dt^2}=0$ tiene como solución

$$x_h(t)=c_1+c_2t+c_3sen(2t)+c_4\cos(2t).$$

El término no homogéneo es la función $F(t)=12t^2+8sen(2t)-8\cos(2t)$, que es combinación lineal de tres funciones de tipo CI. Formamos el conjunto CI de cada una las funciones $t^2, sen(2t), \cos(2t)$, que respectivamente son:

$$S_1=\{t^2,t,1\}, S_2=\{sen(2t),\cos(2t)\}, S_3=\{\cos(2t), sen(2t)\}.$$

Observamos que $S_2=S_3$, por lo tanto eliminamos el conjunto S_2. Por otro lado $S_1=\{t^2,t,1\}$ contiene a solución $t,1$; entonces este conjunto debe ser multiplicado por t^2 (potencia mínima de t), así se tiene un nuevo conjunto $S_1^*=\{t^4,t^3,t^2\}$ que ya no incluye a la solución. Similarmente el conjunto $S_3=\{\cos(2t), sen(2t)\}$ contiene a la solución $sen(2t), \cos(2t)$, entonces multiplicamos por t y queda

$$S_3^*=\{t\cos(2t), tsen(2t)\}.$$

Después de análizar quedan los conjuntos,

$$S_1^*=\{t^4,t^3,t^2\}, S_3^*=\{t\cos(2t), tsen(2t)\}$$

con los elementos de los conjuntos que quedan formulamos la solución $x_p(t)$ escribiendo la combinación lineal,

$$x_p(t)=At^4+Bt^3+Ct^2+Dt\cos(2t)+Etsen(2t)$$

Derivando cuatro veces

$$x'_p(t)=4At^3+3Bt^2+2Ct+Dcos(2t)-2Dtsen(2t)+Esen(2t)$$
$$+2Etcos(2t)$$
$$x''_p(t)=12At^2+6Bt+2C-4Dsen(2t)-4Dtcos(2t)+4Ecos(2t)$$
$$-4Etsen(2t)$$

$$x_p^{(3)} = 24At + 6B - 12Dcos(2t) + 8Dtsen(2t) - 12Esen(2t) - 8Etcos(2t),$$
$$x_p^{(4)} = 24A + 32Dsen(2t) + 16Dtcos(2t) - 32Ecos(2t) + 16Etsen(2t)$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene,

$$(24A + 32Dsen(2t) + 16Dtcos(2t) - 32Ecos(2t) + 16Etsen(2t))$$
$$+4(12At^2 + 6Bt + 2C - 4Dsen(2t) - 4Dtcos(2t) + 4Ecos(2t) - 4Etsen(2t))$$
$$\equiv$$
$$12t^2 + 8sen(2t) - 8\cos(2t)$$

se cumple idénticamente, $48A = 12, B = 0; 24A + 8C = 0; 16D = 8; -16E = -8;$ de donde $A = \frac{1}{4}, B = 0, C = -\frac{3}{4}, D = \frac{1}{2}, E = \frac{1}{2}$. Finalmente, en la integral particular es

$$x_p(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t\cos(2t) + \frac{1}{2}tsen(2t).$$

Por lo tanto, la solución general es,

$$x(t) = c_1 + c_2t + c_3sen(2t) + c_4\cos(2t) + \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t\cos(2t) + \frac{1}{2}tsen(2t)$$

para c_1, c_2, c_3, c_4 constantes arbitrarias. ■

Ejemplo 29. Resolver la ecuación diferencial $x'' - x = 6t^2e^t + 1$.

Solución. La correspondiente ecuación homogénea es $x'' - x = 0$, que tiene como solución

$$x_h(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}.$$

El término no homogéneo es la función $F(t) = 6t^2e^t + 1$, que es combinación lineal de dos funciones de tipo CI. Formamos el conjunto CI de cada una las funciones $t^2e^t, 1$, que respectivamente son: $S_1 = \{t^2e^t, te^t, e^t\}, S_2 = \{1\}$.

Observamos que $S_1 \neq S_2$ o $S_1 \not\subset S_2$ o $S_2 \not\subset S_1$. Por otro lado $S_1 = \{t^2e^t, te^t, e^t\}$ contiene a solución e^t; entonces este conjunto debe ser multiplicado por t (potencia mínima de t), así se tiene un nuevo conjunto $S_1^* = \{t^3e^t, t^2e^t, te^t\}$ que ya no incluye a la solución.

Después quedan los conjuntos,

$$S_1^* = \{t^3e^t, t^2e^t, te^t\}, S_2 = \{1\},$$

con los elementos de los conjuntos S_1 y S_2 formulamos la solución $x_p(t)$ escribiendo la combinación lineal,

$$x_p(t) = At^3e^t + Bt^2e^t + Cte^t + D$$

derivando dos veces

$$x'_p(t) = 3At^2e^t + At^3e^t + 2Bte^t + Bt^2e^t + Ce^t + Cte^t$$
$$x''_p(t) = 6Ate^t + 6At^2e^t + At^3e^t + 2Be^t + 4Bte^t + Bt^2e^t + 2Ce^t + Cte^t,$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene,

$$(6Ate^t + 6At^2e^t + At^3e^t + 2Be^t + 4Bte^t + Bt^2e^t + 2Ce^t + Cte^t) -$$
$$(At^3e^t + Bt^2e^t + Cte^t + D) \equiv 6t^2e^t + 1,$$

para que se cumpla idénticamente, $6A + 2B = 0, 6A = 6; B + C = 0; -D = 1;$ de donde $A = 1, B = -\frac{3}{2}, C = \frac{3}{2}, D = -1$. Finalmente, en ($S_1$) la integral particular es

$$x_p(t) = t^3e^t - \frac{3}{2}t^2e^t + \frac{3}{2}te^t - 1.$$

Por lo tanto, la solución general es,

$$x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + t^3e^t - \frac{3}{2}t^2e^t + \frac{3}{2}te^t - 1,$$

para c_1, c_2 constantes arbitrarias. ■

Ejemplo 30. Resuelve la ecuación diferencial $x''' - 3x'' + 3x' = x + e^t - t + 16$.

Solución. La correspondiente ecuación homogénea es $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0$, que tiene como solución

$$x_h(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t.$$

El término no homogéneo es la función $F(t) = e^t - t + 16$, que es combinación lineal de dos funciones de tipo CI. Formamos el conjunto CI de cada una las funciones $e^t, t, 1$, que respectivamente son: $S_1 = \{e^t\}, S_2 = \{1, t\}$ y $S_3 = \{1\}$.

Observamos que $S_3 \subset S_2$, luego queda $S_1 = \{e^t\}, S_2 = \{1, t\}$. Por otro lado $S_1 = \{e^t\}$ contiene a solución e^t; entonces este conjunto debe ser multiplicado por t^3 (potencia mínima de t), así se tiene un nuevo conjunto $S_1^* = \{t^3e^t\}$ que ya no incluye a la solución.

Quedan los conjuntos,

$$S_1^* = \{t^3e^t\}, S_2 = \{1, t\},$$

con los elementos de los conjuntos S_1^* y S_2 formulamos la solución $x_p(t)$ escribiendo la combinación lineal,

$$x_p(t) = A + Bt + Ct^3e^t\ .$$

derivando tres veces

$$x'_p(t) = B + 3Ct^2ee^t + Ct^3e^t$$
$$x''_p(t) = 6Cte^t + 6Ct^2e^t + Ct^3e^t,$$
$$x'''_p(t) = 6Ce^t + 18Cte^t + 9Ct^2e^t + Ct^3e^t,$$

sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando se obtiene,

$$6Ce^t + (3B - A) - Bt \equiv e^t + 16 - t,$$

para que se cumpla idénticamente, $6C = 1, 3B - A = 16; -B = -1;$ de donde $C = \frac{1}{6}, B = 1, A = -13$. Finalmente, la integral particular es

$$x_p(t) = -13 + t + \frac{1}{6}t^3e^t.$$

Por lo tanto, la solución general es,

$$x(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t - 13 + t + \frac{1}{6}t^3e^t,$$

para c_1, c_2, c_3 constantes arbitrarias. ■

Ejemplo 31. Resuelve la ecuación diferencial $\frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^3x}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} = e^t + 1.$

Solución. La correspondiente ecuación homogénea es $\frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^3x}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} = 0$, que tiene como solución

$$x_h(t) = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4te^t.$$

El término no homogéneo es la función $F(t) = e^t + 1$, que es combinación lineal de dos funciones de tipo CI. Formamos el conjunto CI de cada una las funciones $e^t, 1$, que respectivamente son: $S_1 = \{e^t\}$, $S_2 = \{1,\}$. Por otro lado, tanto $S_1 = \{e^t\}$ como $S_2 = \{1,\}$ contiene a solución $x_h(t)$; entonces los conjunto deben ser multiplicado por t^2 (potencia mínima de t), así se tiene un nuevo conjunto $S_1^* = \{t^2e^t\}$ y $S_2^* = \{t^2\}$. Con los elementos de los conjuntos S_1^* y S_2 formulamos la solución $x_p(t)$ escribiendo la combinación lineal,

$$x_p(t) = At^2 + Bt^2e^t\ .$$

Derivando cuatro veces

$$x'_p(t) = 2At + 2Bte^t + Bt^2e^t$$
$$x''_p(t) = 2A + 2Be^t + 4Bte^t + Bt^2e^t,$$
$$x'''_p(t) = 6Be^t + 6Bte^t + Bt^2e^t,$$
$$x_p^{(4)}(t) = 12Be^t + 18Bte^t + Bt^2e^t$$

sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando se obtiene,

$$2A + 2Be^t \equiv e^t + 1,$$

para que se cumpla idénticamente, $2A = 1, 2B = 1$ de donde $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$. Finalmente, la integral particular es

$$x_p(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2e^t.$$

Por lo tanto, la solución general es,

$$x(t) = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4te^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2e^t,$$

para c_1, c_2, c_3, c_4 constantes arbitrarias. ■

PROBLEMAS 5.4

Halle la solución general de las ecuaciones diferenciales:

a) $x'' - 4x' + 4x - 12t^2 = 42 - 40t$.

R. $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t} + 3t^2 - 4t + 5$.

b) $x'' + a^2 x = sen(bt)$ siendo a, b constantes positivas.

R. $x(t) = c_1 \cos(at) + c_2 sen(at) + \frac{1}{a^2+b^2} sen(at), \quad a \neq b \quad ; \quad x(t) = c_1 \cos(at) + c_2 sen(at) + \frac{1}{a^2+b^2} sen(at) - \frac{1}{2a} tcos(at), a = b$.

c) $x'' + 16x = e^{3x}$.

R. $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 sen(4t) + \frac{1}{25} e^{3t}$.

d) $x'' - 4x' + 4x = 4(2t - 1)e^{4t}$.

R. $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t} + (2t - 1)e^{4t}$.

e) $x'' - 2x' + 3x = 3t + 4$.

R. $x(t) = e^t\left[c_1 cos\left(\sqrt{2}t\right) + c_2 sen\left(\sqrt{2}t\right)\right] + t + 2$.

f) $x'' - x' - 6x = 8e^{2t} - 5e^{3t}; x(0) = 3, x'(0) = 5$.

R. $x(t) = e^{-2t} + 4e^{3t} - 2e^{2t} - te^{3t}$.

g) $x'' - 4x' + 4x = -23\cos(3t) - 80 sen(3t)$.

R. $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t} + 4sen(3t) - 5\cos(3t)$.

h) $4x'' + 4x' + x = 3te^t$.

R. $x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(c_1 + c_2 t) - \frac{4}{9}e^t + \frac{1}{3}te^t$.

i) $x'' + 2x' + x = te^t cost$.

R. $x(t) = c_1 e^t + c_2 te^{-t} + \frac{1}{125}e^t[(15t - 4)cost + (20t - 22)sent]$.

j) $x'' = -x + sen(t) + tcos(t)$.

R. $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 sen(t) - \frac{1}{4}tcos(t) + \frac{1}{4}t^2 sen(t)$.

k) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = \cosh(2t)$.

R. $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{8}te^{2t} - \frac{1}{8}te^{-2t}$.

l) $x'' + 4x = -4x' + 2t + 6$.

R. $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t} + 1 + \frac{1}{2}t$.

m) $x'' = -25x + 20sen(5t)$.

R. $x(t) = c_1 \cos(5t) + c_2 sen(5t) - 2tcos(5t)$.

n) $x''' - 3x'' = x - 3x' + 16 - t + e^t$.

R. $x(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^t - 13 + t + \frac{1}{6}t^3 e^t$.

o) $x'' = -x + sen(t) - 2\cos(t)$.

R. $x(t) = c_1 cos(t) + c_2\,\text{sen}(t) + \frac{1}{2}t\,\text{sen}(t) + tcos(t)$.

p) $16\frac{d^4x}{dt^4} = x + e^{\frac{t}{2}}$.

R. $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t/2} + c_3\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_4 sen\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{8}te^{\frac{t}{2}}$.

q) $\frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^3x}{dt^2} = -\frac{d^2x}{dt^2} + e^t + 1$

R. $x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 te^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2 e^t$.

r) $x'' + x = 8\cos(2t) - 4sen(2t),\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; x'^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0$.

R. $x(t) = -\pi\cos(t) - \frac{11}{3}sen(t) - \frac{8}{3}\cos(2t) + 2tcos(t)$.

s) $x'' + x = tsen(t)$.

R. $x(t) = c_1 sen(t) + c_2\cos(t) - \frac{1}{4}t^2\cos(t) + \frac{1}{4}tsen(t)$.

t) $x'' = 2x' + 3x - 9 + 4e^t$.

R. $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + 3 - e^t$.

u) Si a, b, c son positivos siendo $x_1(t), x_2(t)$ soluciones de la ecuación diferencial $ax'' + bx' + cx = f(t)$, demuestre que $(x_1(t) - x_2(t)) \to 0$ cuando $t \to \infty$, ¿es válida este resultado si $t = 0$?

v) $x''' = -x'' + 2 + 9t - 6t^2$.

R. $x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-8t} + \frac{11}{256}t^2 + \frac{7}{32}t^3 - \frac{1}{16}t^4$.

5.9 MÉTODO DE VARIACIÓN DE CONSTANTES

El método de variación de constantes o *variación de parámetros*, es un método menos restrictivo en comparación del método de los coeficientes indeterminados, se aplican a una cantidad más amplia de ecuaciones; como primera condición requiere conocer la solución complementaria $x_c(t)$. El asunto es cómo generar una solución particular y general, para tener éxito, necesariamente ya se debe conocer la solución de la ecuación homogénea asociada, por supuesto que si la parte homogénea es de coeficientes constantes entonces resulta simple. Si los coeficientes no son constantes, la tarea es mucho más compleja, con excepción de algunos casos particulares como la ecuación de Cauchy-Euler (Sotomayor, 1979).

CASO 1: ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

Explicaremos el método para el caso de una ecuación diferencial de segundo orden,

$$a_o(t)\frac{d^2x}{dt^2}+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_2(t)x=f(t)\,, \qquad (17)$$

considerando que $x_1(t), x_2(t)$ forman un Sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea,

$$a_o(t)\frac{d^2x}{dt^2}+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_2(t)x=0\;, \qquad (18)$$

y tiene como solución

$$x_c(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t) \qquad (19)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. El método consiste justamente en hacer variar estas constantes, es decir determinar $c_1(t)$ y $c_2(t)$ tales que $x_p(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)$ sea una solución particular de la ecuación no homogénea (17). Entonces al asumir una solución de la forma,

$$x_p(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t),$$

derivamos dos veces exigimos que cumpla como solución,

$$x'_p(t)=c_1{}'(t)x_1(t)+c_1(t)x'_1(t)+c_2{}'(t)x_2(t)+c_2(t)x'_2(t),$$

imponemos la condición,

$$c_1{}'(t)x_1(t)+c_2{}'(t)x_2(t)=0,$$

y queda $x'_p(t)=c_1(t)x'_1(t)+c_2(t)x'_2(t)$. Derivando nuevamente

$$x''_p(t)=c_1{}'(t)x'_1(t)+c_1(t)x''_1(t)+c_2{}'(t)x'_2(t)+c_2(t)x''_2(t)\,,$$

reemplazando $x_p(t), x'_p(t), x''_p(t)$ en la ecuación (17)

$$\begin{gathered}a_o(t)(c_1{}'(t)x'_1(t)+c_1(t)x''_1(t)+c_2{}'(t)x'_2(t)+c_2(t)x''_2(t))\\ +a_1(t)(c_1{}'(t)x_1(t)+c_1(t)x'_1(t)+c_2{}'(t)x_2(t)+c_2(t)x'_2(t))\\ +a_2(t)(c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t))=f(t),\end{gathered}$$

al ser $x_1(t)$ y $x_2(t)$, reduce a la ecuación,

$$c'_1(t)x'_1(t)+c'_2(t)x'_2(t)=\frac{f(t)}{a_0(t)},$$

por cierto $a_0(t)\neq 0$.

De esta forma se tiene para resolver un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases}c_1{}'(t)x_1(t)+c_2{}'(t)x_2(t)=0\\ c'_1(t)x'_1(t)+c'_2(t)x'_2(t)=\frac{f(t)}{a_0(t)},\end{cases} \qquad (20)$$

el determinante del sistema (20) es el Wronskiano,

$$W(x_1,x_2)(t)=\begin{vmatrix}x_1(t) & x_2(t)\\ x'_1(t) & x'_2(t)\end{vmatrix}.$$

Por último en el sistema (20) usando determinantes y luego integrando se obtienen $c_1(t)$ y $c_2(t)$

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt \text{ y } c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt, \qquad (21)$$

por lo tanto la solución $x_p(t)$ de manera completa se escribe,

$$x_p(t) = -x_1(t)\int \frac{x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt + x_2(t)\int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt.$$

Este resultado para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas con coeficientes constantes (o variables) segundo orden, pueden generalizarse para un orden n cualquiera. Es bueno aclarar que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n forma *un espacio vectorial* de dimensión n. El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n es un *espacio afín* de dimensión n asociado al espacio vectorial del conjunto de las soluciones de la ecuación homogénea asociada.

CASO 2: GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO

Como el método parte primero por conocer ya las soluciones de la ecuación homogénea, consideremos el problema para una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_nx = f(t), \qquad (22)$$

donde $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes reales y $f(t)$ es una función continua en $t \in \langle a, b\rangle$. Tenemos las soluciones de la parte homogénea $x_c(t)$ donde el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\},$$

de manera que la solución es

$$x_c(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) + \cdots + c_nx_n(t), \qquad (23)$$

donde $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias. Por este método, para formular nuestra solución particular de la ecuación completa se requiere hacer variar estas constantes arbitrarias, es decir, nuestra solución $x_p(t)$ es

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + c_3(t)x_3(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t). \qquad (24)$$

Para obtener la solución (23), se requiere hallar las n funciones $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$ y para ello se requiere imponer n condiciones iniciales. Estas condiciones iniciales se escriben apropiadamente,

$$c'_1(t)x_1(t) + c'_2(t)x_2(t) + \cdots + c'_n(t)x_n(t) = 0$$

$$c'_1(t)x'_1(t) + c_2'(t)x'_2(t) + \cdots + c'_n(t)x'_n(t) = 0$$
$$c'_1(t)x''_1(t) + c_2'(t)x''_2(t) + \cdots + c'_n(t)x''_n(t) = 0$$
$$\cdots$$
$$c'_1(t)x_1^{(n-2)}(t) + c_2'(t)x_2^{(n-2)}(t) + \cdots + c'_n(t)x_n^{(n-2)}(t) = 0$$
$$c'_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c'_n(t)x_n^{(n-1)}(t) = \frac{f(t)}{a_0}.$$

Para obtener la última condición se reemplaza

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t)$$
$$x'_p(t) = c_1(t)x'_1(t) + c_2(t)x'_2(t) + \cdots + c_n(t)x'_n(t)$$
$$x''_p(t) = c_1(t)x''_1(t) + c_2(t)x''_2(t) + \cdots + c_n(t)x''_n(t)$$
$$\cdots$$
$$x_p^{(n-1)}(t) = c_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n(t)x_n^{(n-1)}(t)$$

también $x_p^{(n)}(t)$ en la ecuación diferencial (1) y se obtiene

$$c'_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c'_n(t)x_n^{(n-1)}(t) = \frac{f(t)}{a_0}.$$

Entonces hay que resolver el sistema, donde las n incógnitas son $c'_1(t)$, $c'_2(t)$, ..., $c'_n(t)$ donde el del determinante del sistema es $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)(t) \neq 0$. Por tanto, las soluciones son

$$c'_k(t) = \frac{W_k(t).f(t)}{a_0W(x_1,x_2,\ldots,x_n)(t)},$$

donde la determinante W_k tiene como $(0,0,\ldots,0,1)$ en la columna k-ésima y el resto de la columna coincide con el determinante Wronskiano $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)(t)$. Luego integrando se obtiene

$$c_k(t) = \int \frac{W_k(t).f(t)}{a_0W(x_1,x_2,\ldots,x_n)(t)}dt.$$

Por lo tanto, en (24) sustituyendo parámetros se obtiene la solución particular de la ecuación no homogénea,

$$x_p(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) \int_{t_0}^{t} \frac{W_k(u).f(u)}{a_0W(x_1,x_2,\ldots,x_n)(u)}du.$$

Observación. Para el caso de una ecuación diferencial de tercer orden, usando este resultado se puede hallar $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$, para lo cual se tomaría en cuenta que $k = 1,2,3$, veamos,

$$c'_1(t) = \frac{W_1(t).f(t)}{a_0W(x_1,x_2,x_3)(t)} = \frac{f(t)\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) & x_3(t) \\ 0 & x'_2(t) & x'_3(t) \\ 1 & x''_2(t) & x''_3(t) \end{vmatrix}}{a_0W(x_1,x_2,x_3)(t)} = \frac{[x_2(t)x'_3(t) - x'_2(t)x_3(t)]f(t)}{a_0W(x_1,x_2,x_3)(t)},$$

integrando se obtiene

$$c_1(t) = \int \frac{[x_2(t)x'_3(t) - x'_2(t)x_3(t)]f(t)}{a_0 W(x_1, x_2, x_3)(t)} dt,$$

similarmente,

$$c'_2(t) = \frac{W_2(t).f(t)}{a_0 W(x_1,x_2,x_3)(t)} = \frac{f(t)\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 & x_3(t) \\ x'_1(t) & 0 & x'_3(t) \\ x''_1(t) & 1 & x''_3(t) \end{vmatrix}}{a_0 W(x_1,x_2,x_3)(t)} = \frac{[x'_1(t)x_3(t) - x_1(t)x'_3(t)]f(t)}{a_0 W(x_1,x_2,x_3)(t)}$$

integrando se obtiene

$$c_2(t) = \int \frac{[x'_1(t)x_3(t) - x_1(t)x'_3(t)]f(t)}{a_0 W(x_1, x_2, x_3)(t)} dt$$

$$c'_3(t) = \frac{W_3(t).f(t)}{a_0 W(x_1,x_2,x_3)(t)} = \frac{f(t)\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & 0 \\ x'_1(t) & x'_2(t) & 0 \\ x''_1(t) & x''_2(t) & 1 \end{vmatrix}}{a_0 W(x_1,x_2,x_3)(t)} = \frac{[x_1(t)x'_2(t) - x'_1(t)x_2(t)]f(t)}{a_0 W(x_1,x_2,x_3)(t)},$$

integrando se obtiene

$$c_3(t) = \int \frac{[x_1(t)x'_2(t) - x'_1(t)x_2(t)]f(t)}{a_0 W(x_1, x_2, x_3)(t)} dt.$$

Ejemplo 32. Resuelve la ecuación diferencial $x'' + x = sec^2(t)$.

Solución. Primero se debe conocer la solución de la ecuación homogénea $x'' + x = 0$, el conjunto fundamental de soluciones es $\{sen(t), \cos(t)\}$, entonces la solución complementaria (de la parte homogénea) es,

$$x_c(t) = c_1 sen(t) + c_2 \cos(t)$$

Naturalmente si queremos hallar la solución particular completa $x_p(t)$ no podríamos utilizar el método de coeficientes indeterminados, y que la función $sec^2(t)$ no es del tipo CI; luego se aplica el método de variación de constantes, formulamos nuestra solución por este método,

$$x_p(t) = c_1(t) sen(t) + c_2(t) \cos(t).$$

Tenemos $x_1(t) = sen(t), x_2(t) = \cos(t), a_0 = 1, f(t) = sec^2(t)$, el Wronskiano se puede calcular,

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} sen(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -sen(t) \end{vmatrix} = -1,$$

para encontrar $c_1(t)$ y $c_2(t)$ recurrimos a la integrales ya encontradas arriba y son,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)} dt \text{ y } c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)} dt.$$

Para $c_1(t)$,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1, x_2)(t)} dt = \int \frac{-\cos(t) sec^2(t)}{-1} dt = \int \sec(t)\, dt$$
$$= ln|\sec(t) + \tan(t)|,$$

para $c_2(t)$,

$$c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)} dt = \int \frac{sen(t)sec^2(t)}{-1} dt = -\sec(t).$$

Estas funciones no admiten constantes arbitrarias, por tanto en (a_1) se obtiene la solución

$x_p(t) = (sen(t))ln|\sec(t) + \tan(t)| - 1,$

entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$
$$= c_1 sen(t) + c_2 \cos(t) + (sen(t))ln|\sec(t) + \tan(t)| - 1. ■$$

Ejemplo 33. Resuelve la ecuación diferencial $x'' - 3x' = -2x + \frac{e^{3t}}{1+e^t}$.

Solución. Primero se debemos encontrar la solución de la ecuación diferencial homogénea $x'' - 3x' + 2x = 0$, el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^t, e^{2t}\}$, entonces la solución complementaria (de la parte homogénea) es,

$$x_c(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

En este caso si queremos hallar la solución particular completa $x_p(t)$ no podríamos utilizar el método de coeficientes indeterminados, y que la función $f(t) = \frac{e^{3t}}{1+e^t}$ no es del tipo CI; lo conveniente es aplicar el método de variación de constantes, formulamos nuestra solución por este método,

$$x_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(\mathrm{t})e^{2t}.$$

Tenemos $x_1(t) = e^t, x_2(t) = e^{2t}$, $a_0 = 1$, $f(t) = \frac{e^{3t}}{1+e^t}$, el Wronskiano se puede calcular,

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{vmatrix} = e^{3t},$$

para encontrar $c_1(t)$ y $c_2(t)$ recurrimos a la integrales,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)} dt \ \text{ y } \ c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)} dt.$$

Para $c_1(t)$,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)} dt = \int \frac{-e^{2t}.e^{3t}}{e^{3t}(1+e^t)} dt = -\int \frac{e^{2t}}{1+e^t} dt$$
$$= ln(1+e^t) - e^t,$$

Para $c_2(t)$,

$$c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)} dt = \int \frac{e^t e^{3t}}{e^{3t}(1+e^t)} dt = ln(1+e^t).$$

Estas funciones no admiten constantes arbitrarias, por tanto, se obtiene la solución

$$x_p(t) = e^t[-e^t + ln(1+e^t)] + e^{2t}ln(1+e^t),$$

entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$= c_1e^t + c_2e^{2t} + e^t[ln(1+e^t) - e^t] + e^{2t}ln(1+e^t).\blacksquare$$

Ejemplo 34. Resuelve la ecuación diferencial $tx'' - (t+1)x' + x = t^2e^{2t}$, sabiendo que $x_1(t) = t+1$ es una solución de $tx'' - (t+1)x' + x = 0$.

Solución. Primero debemos encontrar la segunda solución $x_2(t)$ de la ecuación diferencial homogénea $tx'' - (t+1)x' + x = 0$, para esto usamos reducción de orden, haciendo

$$x_2(t) = v(t)(t+1),$$

derivando dos veces $x'_2(t) = v(t) + (t+1)v'(t), x''_2(t) = 2v'(t) + (t+1)v''(t)$ y reemplazando en la ecuación homogénea,

$$t[2v'(t) + (t+1)v''(t)] - (t+1)[v(t) + (t+1)v'(t)] + v(t)(t+1) = 0$$

$$t(t+1)v'' - (1+t^2)v' = 0,$$

haciendo $v'(t) = u(t)$ la ecuación se reduce a orden uno, $t(t+1)u' - (1+t^2)u = 0$, donde la solución es $u(t) = te^t(t+1)^{-2}$, ahora deshaciendo cambios

$$v(t) = \int te^t(t+1)^{-2}dt,$$

integrando por partes se obtiene $v(t) = e^t(1+t)^{-1}$, entonces la segunda solución buscada queda $x_2(t) = (1+t)e^t(1+t)^{-1} = e^t$. Por lo tanto, el conjunto fundamental de soluciones es $\{1+t, e^t\}$, entonces la solución complementaria (de la parte homogénea) es,

$$x_c(t) = c_1(1+t) + c_2e^t.$$

En este caso si queremos hallar la solución particular completa $x_p(t)$ podríamos utilizar el método de coeficientes indeterminados, y que la función $f(t) = t^2e^{2t}$ es del tipo CI; pero también se podría aplicar el método de variación de constantes, formulamos nuestra solución por este método,

$$x_p(t) = c_1(t)(1+t) + c_2(\text{t})e^t.$$

Tenemos $x_1(t) = 1+t, x_2(t) = e^t$, $a_0 = t$, $f(t) = t^2e^{2t}$, el Wronskiano se puede calcular,

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} 1+t & e^t \\ 1 & e^t \end{vmatrix} = te^t,$$

para encontrar $c_1(t)$ y $c_2(t)$ recurrimos a la integrales,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt \text{ y } c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt.$$

Para $c_1(t)$,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{-e^t t^2 e^{2t}}{t(te^t)}dt = -\int e^{2t}dt$$
$$= -\frac{1}{2}e^{2t},$$

Para $c_2(t)$,

$$c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{(1+t)t^2e^{2t}}{t(te^t)}dt = te^t.$$

Estas funciones no admiten constantes arbitrarias, por tanto, se obtiene la solución

$$x_p(t) = (1+t)\left[-\frac{1}{2}e^{2t}\right] + e^t te^t = \frac{1}{2}(t-1)e^{2t},$$

entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$
$$= c_1(1+t) + c_2e^t + \frac{1}{2}(t-1)e^{2t}.\blacksquare$$

Ejemplo 35. Resuelve la ecuación diferencial $x'' + 2x' + x = e^{-t}\ln(t)$.

Solución. Hallamos la solución de la ecuación diferencial homogénea $x'' + 2x' + x = 0$, el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{-t}, te^{-t}\}$, entonces la solución complementaria (de la parte homogénea) es,

$$x_c(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}.$$

En este caso si queremos hallar la solución particular completa $x_p(t)$ no podríamos utilizar el método de coeficientes indeterminados, ya que la función $f(t) = e^{-t}\ln)t)$ no es del tipo CI; entonces necesariamente aplicamos el método de variación de constantes, formulamos la solución por este método,

$$x_p(t) = c_1(t)e^{-t} + c_2(\mathrm{t})\mathrm{t}e^{-t}.$$

Tenemos $x_1(t) = e^{-t}, x_2(t) = te^{-t}$, $a_0 = 1$, $f(t) = e^{-t}\ln(t)$, el Wronskiano se puede calcular,

$$W(x_1,x_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{vmatrix} = e^{-2t},$$

para encontrar $c_1(t)$ y $c_2(t)$ recurrimos a la integrales,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt \text{ y } c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt.$$

Para $c_1(t)$,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{-te^{-t}.e^{-t}\ln(t)}{e^{-2t}}dt = -\int \mathrm{t}\ln(\mathrm{t})dt$$
$$= -\frac{1}{2}t^2\ln(t) + \frac{1}{4}t^2,$$

Para $c_2(t)$,

$$c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{e^{-t}e^{-t}\ln(t)}{e^{-2t}}dt = tln(t) - t.$$

Estas funciones no admiten constantes arbitrarias, por tanto, se obtiene la solución

$$x_p(t) = e^{-t}\left[-\frac{1}{2}t^2\ln(t) + \frac{1}{4}t^2\right] + te^{-t}(tln(t) - t) = \left(\frac{1}{2}\ln(t) - \frac{3}{4}\right)t^2e^{-t},$$

entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$= c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + \left(\frac{1}{2}\ln(t) - \frac{3}{4}\right)t^2e^{-t}, 0 < t < +\infty\ .\blacksquare$$

Ejemplo 36. Dado que $x_1(t) = t^2$ y $x_2(t) = t^3$ forman un espacio de soluciones de la ecuación $t^2x'' - 4tx' + 6x = 0$ en $0 < t < +\infty$, determine la solución general de la ecuación diferencial $t^2x'' - 4tx' + 6x = t^{-1}$.

Solución. Siendo el conjunto fundamental de soluciones $\{t^2, t^3\}$ entonces la solución complementaria es

$$x_c(t) = c_1t^2 + c_2t^3,$$

entonces aplicando variación de parámetros la solución particular completa queda formulado así,

$$x_p(t) = c_1(t)t^2 + c_2(t)t^3,$$

conocemos los datos $x_1(t) = t^2, x_2(t) = t^3$, $a_0(t) = t^2$, $f(t) = t^{-1}$, el Wronskiano se puede calcular,

$$W(x_1,x_2)(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t^3 \\ 2t & 3t^2 \end{vmatrix} = t^4,$$

para encontrar $c_1(t)$ y $c_2(t)$ recurrimos a la integrales,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt \ \text{ y } \ c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt.$$

Para $c_1(t)$,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{-t^3t^{-1}}{t^2.t^4}dt = -\int t^{-4}dt$$

$$= \frac{1}{3}t^{-3},$$

para $c_2(t)$,

$$c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)}dt = \int \frac{t^2t^{-1}}{t^2t^4}dt = -\frac{1}{4}t^{-4}.$$

Por tanto, en (a_1) se obtiene la solución

$$x_p(t) = t^2\left[\frac{1}{3}t^{-3}\right] + t^3\left(-\frac{1}{4}t^{-4}\right) = \frac{1}{12}t^{-1},$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$= c_1 t^2 + c_2 t^3 + \frac{1}{12} t^{-1},\ t \neq 0.\blacksquare$$

Ejemplo 37. Resuelve la ecuación diferencial $x'' - x = te^t$, sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 1, x'(0) = 0$.

Solución. Primero hallamos la solución de la ecuación diferencial homogénea $x'' - x = 0$, el conjunto fundamental de soluciones es $\{e^{-t}, e^t\}$, entonces la solución complementaria (de la parte homogénea) es,

$$x_c(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t.$$

En este caso si queremos hallar la solución particular completa $x_p(t)$ podríamos utilizar el método de coeficientes indeterminados, y que la función $f(t) = te^t$ es del tipo CI; pero aplicamos el método de variación de constantes, formulamos nuestra solución por este método,

$$x_p(t) = c_1(t) e^{-t} + c_2(\mathrm{t}) e^t.$$

Tenemos $x_1(t) = e^{-t}, x_2(t) = e^t$, $a_0 = 1$, $f(t) = te^t$, el Wronskiano se puede calcular,

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^t \\ -e^{-t} & e^t \end{vmatrix} = 2,$$

para encontrar $c_1(t)$ y $c_2(t)$ recurrimos a la integrales,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t) f(t)}{a_0(t) W(x_1, x_2)(t)} dt \text{ y } c_2(t) = \int \frac{x_1(t) f(t)}{a_0(t) W(x_1, x_2)(t)} dt.$$

Para $c_1(t)$,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t) f(t)}{a_0(t) W(x_1, x_2)(t)} dt = \int \frac{-e^t . te^t}{2} dt = -\frac{1}{2} \int \mathrm{te}^{2t} dt$$

$$= \frac{1}{4}(1 - t) e^{2t},$$

Para $c_2(t)$,

$$c_2(t) = \int \frac{x_1(t) f(t)}{a_0(t) W(x_1, x_2)(t)} dt = \int \frac{e^{-t} te^t}{2} dt = \frac{1}{4} t^2.$$

Estas funciones no admiten constantes arbitrarias, por tanto, se obtiene la solución

$$x_p(t) = e^{-t} \left[\frac{1}{4}(1 - t) e^{2t} \right] + e^t \left(\frac{1}{4} t^2 \right) = \frac{1}{4} e^t (t^2 - t + 1),$$

entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$= c_1 e^{-t} + c_2 e^t + \frac{1}{4} e^t (t^2 - t + 1).$$

Aplicando las condiciones iniciales $x(0) = 1, x'(0) = 0$ se obtiene

$$x(t) = \frac{3}{8} e^{-t} + \frac{5}{8} e^t + \frac{1}{4} e^t (t^2 - t).\blacksquare$$

Ejemplo 38. Resuelve la ecuación diferencial $x'' + x = cos^2(t)$, sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 0, x'(0) = 1$.

Solución. Hallamos la solución de la ecuación diferencial homogénea $x'' + x = 0$, el conjunto fundamental de soluciones es $\{sen(t), \cos(t)\}$, entonces la solución complementaria (de la parte homogénea) es,

$$x_c(t) = c_1 sen(t) + c_2 \cos(t),$$

aplicamos el método de variación de constantes, formulamos nuestra solución por este método,

$$x_p(t) = c_1(t) sen(t) + c_2(t)\cos(t).$$

Tenemos $x_1(t) = sen(t), x_2(t) = \cos(t), a_0 = 1, f(t) = cos^2(t)$, el Wronskiano se puede calcular,

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} sen(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -sen(t) \end{vmatrix} = -1,$$

para encontrar $c_1(t)$ y $c_2(t)$ recurrimos a la integrales,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)} dt \text{ y } c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)} dt.$$

Para $c_1(t)$,

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1, x_2)(t)} dt = \int \frac{-\cos(t). cos^2(t)}{-1} dt =$$

$$= sen(t) - \frac{1}{3} sen^3(t),$$

Para $c_2(t)$,

$$c_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{a_0(t)W(x_1,x_2)(t)} dt = \int \frac{sen(t)cos^2(t)}{-1} dt = \frac{1}{3} cos^3(t).$$

Estas funciones no admiten constantes arbitrarias, por tanto, se obtiene la solución

$$x_p(t) = sen(t)\left[sen(t) - \frac{1}{3} sen^3(t)\right] + \cos(t)\left(\frac{1}{3} cos^3(t)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2t),$$

entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$= c_1 sen(t) + c_2 \cos(t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2t).$$

Aplicando las condiciones iniciales $x(0) = 0, x'(0) = 1$ se obtiene

$$x(t) = sen(t) - \frac{1}{3}\cos(t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2t).\blacksquare$$

Ejemplo 39. Resuelve la ecuación diferencial $x''' + 4x' = \cot(2t)$.

Solución. La solución de la ecuación diferencial homogénea $x''' + 4x' = 0$ es,

$$x_c(t) = c_1 + c_2 \cos(2t) + c_3 sen(2t).$$

Por variación de parámetros, como solución particular asumimos como

$$x_p(t) = c_1(t) + c_2(t)\cos(2t) + c_3(t)sen(2t)\,.$$

Para encontrar las funciones $c_1(t)$, $c_2(t)$ y $c_3(t)$ se tiene los datos $f(t) = \cot(2t)$, $a_0(t) = 1$, $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = \cos(2t)$, $x_3(t) = sen(2t)$, también calculamos el wronskiano,

$$w(x_1, x_2, x_3)(t) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(2t) & sen(2t) \\ 0 & -2sen(2t) & 2\cos(2t) \\ 0 & -4\cos(2t) & -4sen(2t) \end{vmatrix} = 8(cos^2(2t) + sen^2(2t)) = 8,$$

De la misma forma se requiere saber las determinantes para W_1, W_2, W_3; sabiendo que la determinante W_k tiene $(0,0,0,\dots,0,1)$ en la $k-$ésima columna y el resto coincide con el determinante del wronskiano,

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & \cos(2t) & sen(2t) \\ 0 & -2sen(2t) & 2\cos(2t) \\ 1 & -4\cos(2t) & -4sen(2t) \end{vmatrix} = 2\,,$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & sen(2t) \\ 0 & 0 & 2\cos(2t) \\ 0 & 1 & -4sen(2t) \end{vmatrix} = 2\cos(2t),$$

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(2\mathrm{t}) & 0 \\ 0 & -2sen(2t) & 0 \\ 0 & -4\cos(2\mathrm{t}) & 1 \end{vmatrix} = -2\mathrm{sen}(2t),$$

entonces ya se puede obtener $c_1(t)$, $c_2(t)$ y $c_3(t)$ y están dados por las integrales

$$c_1(t) = \int \frac{W_1(t)f(t)}{a_0 W(x_1,x_2,x_3)(t)}dt = \int \frac{2\cot(2t)}{8}dt = \frac{1}{8}ln|sen(2t)|\,,$$

$$c_2(t) = \int \frac{W_2(t)f(t)}{a_0 W(x_1,x_2,x_3)(t)}dt = \int \frac{-2\cot(2t)\cos(2t)}{8}dt$$

$$= -\frac{1}{8}ln|csc(2t) - \cot(2t)| - \frac{1}{8}cos(2t)$$

$$c_3(t) = \int \frac{W_3(t)f(t)}{a_0 W(x_1,x_2,x_3)(t)}dt = \int \frac{-2\cot(2t)\mathrm{sen}(2t)}{8}dt = -\frac{1}{4}\int \cos(2t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{8}sen(2t)$$

Por lo tanto, reemplazando los parámetros, la solución particular se escribe

$$x_p(t) = \frac{1}{8}ln|sen(2t)| + \left[-\frac{1}{8}ln|csc(2t) - \cot(2t)| - \frac{1}{8}cos(2t)\right]\cos(2t)$$

$$-\frac{1}{8}sen^2(2t),$$

y la solución general es

$$x(t) = c_1 + c_2\cos(2t) + c_3 sen(2t) + \frac{1}{8}ln|sen(2t)| +$$

$$+\left[-\frac{1}{8}ln|csc(2t) - \cot(2t)|\right]\cos(2t) - \frac{1}{8}\,. \blacksquare$$

Ejemplo 40. Resuelve la ecuación $t^3x''' + 3t^2x'' = 3tx' + tln(t)$.

Solución. La ecuación $t^3x''' + 3t^2x'' - 3tx' = 0$ es de tipo Cauchy-Euler, entonces haciendo el cambio de variable $t = e^z$, se obtiene la ecuación diferencial,

$$\frac{d^3x}{dz^3} - 4\frac{dx}{dz} = ze^z\ ,$$

donde la solución de la ecuación homogénea $\frac{d^3x}{dz^3} - 4\frac{dx}{dz}$ está dado por

$$x_c(z) = c_1 + c_2e^{2z} + c_3e^{-2z}\ .$$

Por variación de parámetros, como solución particular asumimos

$$x_p(z) = c_1(z) + c_2(z)e^{2z} + c_3(z)e^{-2z}\ .$$

Para encontrar las funciones $c_1(z)$, $c_2(z)$ y $c_3(z)$ se tiene los datos $f(t) = ze^z$, $a_0(z) = 1$, $x_1(z) = 1$, $x_2(z) = e^{2z}$, $x_3(t) = e^{-2z}$, también calculamos el wronskiano,

$$w(x_1, x_2, x_3)(z) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2z} & e^{-2z} \\ 0 & 2e^{2z} & -2e^{-2z} \\ 0 & 4e^{2z} & 4e^{-2z} \end{vmatrix} = 16.$$

De la misma forma se requiere saber las determinantes para W_1, W_2, W_3; sabiendo que la determinante W_k tiene $(0,0,0, \dots ,0,1)$ en la $k -$ ésima columna y el resto coincide con el determinante del wronskiano,

$$W_1(z) = \begin{vmatrix} 0 & e^{2z} & e^{-2z} \\ 0 & 2e^{2z} & -2e^{-2z} \\ 1 & 4e^{2z} & 4e^{-2z} \end{vmatrix} = -4\ ,$$

$$W_2(z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-2z} \\ 0 & 0 & -2e^{-2z} \\ 0 & 1 & 4e^{-2z} \end{vmatrix} = 2e^{-2z},$$

$$W_3(z) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2z} & 0 \\ 0 & 2e^{2z} & 0 \\ 0 & 4e^{2z} & 1 \end{vmatrix} = 2e^{z},$$

entonces ya se puede obtener $c_1(t)$, $c_2(t)$ y $c_3(t)$ y están dados por las integrales

$$c_1(z) = \int \frac{W_1(z)f(z)}{a_0W(x_1,x_2,x_3)(z)}dz = \int \frac{-4ze^z}{16}dz = -\frac{1}{4}e^z(z-1)\ ,$$

$$c_2(z) = \int \frac{W_2(z)f(z)}{a_0W(x_1,x_2,x_3)(z)}dz = \int \frac{2e^{-2z}ze^z}{16}dz = -\frac{1}{8}e^{-z}(z+1)$$

$$c_3(z) = \int \frac{W_3(z)f(z)}{a_0W(x_1,x_2,x_3)(z)}dz = \int \frac{2e^{2z}ze^z}{16}dt = \frac{1}{72}e^{3z}(3z+1).$$

Por lo tanto, reemplazando los parámetros, la solución particular se escribe

$$x_p(z) = -\frac{1}{4}e^z(z-1) - \frac{1}{8}e^{-z}(z+1)e^{2z} + \frac{1}{72}e^{3z}(3z+1)e^{-2z},$$

$$= \frac{1}{9}e^z(1-3z)$$

y la solución general en z es

$$x(z) = c_1 + c_2 e^{2z} + c_3 e^{-2z} + \frac{1}{9}e^{z}(1-3z).$$

Por último deshaciendo el cambio $t = e^z$ se obtiene,

$$x(z) = c_1 + c_2 t^2 + c_3 t^{-2} + \frac{1}{9}t(1-3\ln(t))\ . \ \blacksquare$$

PROBLEMAS 5.5

1. Resuelve las ecuaciones diferenciales:

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sec(t)$.

R. $x(t) = c_1\cos(t) + c_2 sen(t) + (\cos(t))ln|\cos(t)| + tsen(t),\ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

b) $x'' + x = cos^2(t)$.

R. $x(t) = c_1\cos(t) + c_2 sen(t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2t)$.

c) $x'' = 2x' - x + e^t\arctan(t)$.

R. $x(t) = c_1e^t + c_2te^t + \left[\frac{3}{2}t^2\arctan(t) + \frac{1}{2}arctan(t) - \frac{t}{2} - \frac{t}{2}\ln(1+t^2)\right]e^t$.

d) $x'' + 3x' + 2x = \frac{1}{1+e^t}$.

R. $x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + (e^{-t} + e^{-2t})ln(1+e^t),\ t \in \langle -\infty, +\infty\rangle$.

e) $x'' + 4x = cos^2(2x)$.

R. $x(t) = c_1\cos(2t) + c_2 sen(2t) + \frac{1}{6}sen^2(2t) + \frac{1}{12}cos^2(2t)$.

f) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = \frac{e^t}{1+t^2}$.

R. $x(t) = c_1e^t + c_2te^t - \frac{1}{2}e^t ln(1+e^t) + te^t arctam(t),\ 0 < t < +\infty$.

g) $x'' = -9x + 9\sec(3t)\tan(3t)$.

R. $x(t) = c_1\operatorname{sen}(3t) + c_2cos(3t) + 3tcos(3t) - \big(sen(3t)\big)\ln(cos(3t))$.

h) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = sen(e^t)$.

R. $x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} - e^{-2t}sen(e^t),\ -\infty < t < +\infty$.

i) $(t-1)x'' - tx' + x = (t-1)^2e^{2t}$.

R. $x(t) = c_1t + c_2e^t + \frac{1}{2}te^{2t} - e^{2t}$.

j) $t^2x'' - tx' + x = 2tln(t)$.

R. $x(t) = c_1t + c_2tln(t) + \frac{1}{3}tln^3(t)$.

k) $x'' + 3x' = -2x + \frac{1}{1+e^{2t}}$.

R. $x(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + e^{-t}arctan(e^t) - \frac{1}{2}e^{-2t}ln(1+e^{2t})$.

l) $x'' = -2x' - x + \frac{e^{-t}}{t}$.

R. $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t} + te^{-t}\ln(t)$.

m) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 10x = 3e^t \tan(3t)$.

R. $x(t) = e^t[c_1\cos(3t) + c_2 sen(3t)] - \frac{1}{3}(e^t\cos(3t))ln|\sec(3t) + \tan(3t)|$.

2. Determine la solución general de las ecuaciones:

a) $x^{(4)} + x^{(2)} - t^2 = t$.

R. $x(t) = c_1 + c_2 t + c_3\cos(t) + c_4 sen(t) + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 - t^2$.

b) $x'' + 2x' + x = e^{-t}\ln(t), t > 0$.

R. $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t} + \left(\frac{1}{2}\ln(t) - \frac{3}{4}\right)t^2 e^{-t}$.

c) $x''' + 3x'' = -x - 3x' + e^{-t}$.

R. $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t} + c_3 t^3 e^{-t} + \frac{1}{6}t^3 e^{-t}$.

d) $1 - x''' = -2x''$.

R. $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t + c_3 - \frac{1}{4}t$.

e) $x^{(4)} - 16x^{(2)} = 64\cos(4t)$.

R. $x(t) = c_1 t + c_2 + c_3\cos(4t) + c_4 sen(4t) + \frac{1}{2}tsen(4t)$.

f) $x''' = 6x'' - 11x' + 6x + e^t$.

R. $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} + \frac{1}{2}te^t$.

g) $t^3 x''' + 5t^2 x'' = -2tx' + 2x + t^4$.

R. $x(t) = c_1 t + c_2 t^{-1} + c_3 t^{-3} + \frac{1}{90}x^4$.

h) $t^3 x''' = 4t^2 x'' - 8tx' + 8x + 4\ln(t)$.

R. $x(t) = c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^4 + \frac{1}{2}\ln(t) - \frac{7}{8}$.

i) $t^3 x''' + t^2 x'' - 30t = 6tx' - 6x$.

R. $x(t) = c_1 t + c_2 t^3 + c_3 t^{-2} - \frac{5}{6}t - 5tln(t)$.

j) $x''' - x' + 2t = 0; x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = 2$.

R. $x(t) = senh(t) + t^2$.

k) Obtener la solución general de $(sen^2(t))x'' - (2sen(t)\cos(t))x' + (cos^2(t) + 1)x = sen^3(t)$, sabiendo que $x_1(t) = sen(t)$, $x_2(t) = tsen(t)$ son soluciones linealmente independiente de la correspondiente ecuación homogénea.

l) Obtener la solución general de $t^2x'' = t(t+2)x' - (t+2)x + t^3$, sabiendo que $x_1(t) = t$ y $x_2(t) = te^t$ son soluciones linealmente independientes de la correspondiente ecuación homogénea.
R. $x(t) = c_1 t + c_2 te^t - t - t^2$.

m) Dado que $x_1(t) = t^{-\frac{1}{2}}\cos(t)$ y $x_2(t) = t^{-\frac{1}{2}}sen(t)$ forman un conjunto de soluciones de $t^2x'' + tx' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)x = 0$, en $0 < t < \infty$, halle la solución general de $t^2x'' + tx' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)x = t^{3/2}$.
R. $x(t) = (c_1\cos(t) + c_2 sen(t))t^{-1/2} + t^{-1/2}$.

n) $t^2x''' - 2tx' - 5\ln(t) = 0$ donde $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = \ln(t)$, $x_3(t) = t^3$ forman el conjunto fundamental de soluciones.
R. $x(t) = c_1 + c_2\ln(t) + c_3t^3 - \frac{5}{2}tin(t) + \frac{15}{4}t$.

o) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 8x = -e^{-t} + 2e^{-2t}, x(0) = 1, x'(0) = 0$.
R. $x(t) = \frac{25}{36}e^{2t} + \frac{4}{9}e^{-4t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{9}e^{-t}$.

p) $x^2x''' - xx'' + x' = t^{-1}\ln(t); x(1) = 0, x'(1) = 1, x''(1) = -1$.
R. $x(t) = \frac{1}{4}\ln(t) + \frac{1}{8}ln^2(t) - \frac{7}{8}t^2\ln(t) - \frac{13}{16} + \frac{13}{16}t^2$.

5.10 ECUACIÓN DE CAUCHY EULER

Un caso especial de importancia práctica considerable es estudiar la ecuación de Cauchy-Euler, para lo cual se puede obtener una expresión explícita de la función complementaria, esta ecuación adopta la forma,

$$a_0t^n\frac{d^nx}{dt^n} + a_1t^{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-2}t^2\frac{d^2x}{dt^2} + a_{n-1}t\frac{dx}{dt} + a_nx = f(t), \quad (25)$$

donde $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \ldots + a_n$ son constantes reales. Esta ecuación (25) presenta un arreglo muy especial, cada término excepto $f(t)$, es múltiplo por constante de una expresión como $t^k\frac{d^kx}{dt^k}$, $k = 1,2,3,\ldots,n$, con razón también se le denomina *ecuación equidimensional*.

Teorema 5.15. Dada la ecuación de Cauchy-Euler,

$$a_0t^n\frac{d^nx}{dt^n} + a_1t^{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-2}t^2\frac{d^2x}{dt^2} + a_{n-1}t\frac{dx}{dt} + a_nx = f(t),$$

la transformación $t = e^z$ reduce la ecuación de Cauchy-Euler a una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

Demostración. La prueba se hace por inducción. Probaremos este teorema considerando la ecuación diferencial de segundo orden

$$a_0 t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 t \frac{dx}{dt} + a_2 x = f(t) \qquad (26)$$

Haciendo $t = e^z$ se tiene $z = \ln(t)$ para t positivo (si t es negativo se usa la transformación $t = -e^z$). Luego usar la regla de cadena para derivadas siguiendo el esquema de dependencia

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz}.\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dx}{dz},$$

es decir

$$t\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz}. \qquad (27)$$

Ahora hallamos la segunda derivada respecto de t, naturalmente siguiendo la regla de cadena, se obtiene,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{t}\frac{dx}{dz}\right] = \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dz}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right),$$
$$= \frac{1}{t}\frac{d}{dz}\left(\frac{dx}{dz}\right).\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{1}{t^2}\frac{dx}{dz},$$
$$= \frac{1}{t^2}\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{1}{t^2}\frac{dx}{dz} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right),$$

es decir

$$t^2\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}, \qquad (28)$$

reemplazando (27) y (28) en (26) se obtiene,

$$a_0\left[\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right] + a_1\frac{dx}{dz} + a_2 x = f(e^z)$$

lo cual es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes y se escribe como,

$$a_0\frac{d^2x}{dz^2} + (a_1 - a_0)\frac{dx}{dz} + a_2 x = f(e^z).$$

Seguidamente estudiamos el caso de una ecuación diferencial de Cauchy- Euler de tercer orden,

$$a_0 t^3\frac{d^3x}{dx^2} + a_1 t^2\frac{d^2x}{dt^2} + a_2 t\frac{dx}{dt} + a_3 x = f(t)\,, \qquad (29)$$

considerando los resultados del caso anterior, sólo sería necesario continuar hallando la tercera derivada respecto a t, así

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right)\right],$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2}\right)\left[\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right] + \frac{1}{t^2}\frac{d}{dt}\left[\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right],$$
$$= \frac{-2}{t^3}\left[\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right] + \frac{1}{t^2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dz}\right)\right],$$
$$= \frac{-2}{t^3}\left[\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right] + \frac{1}{t^2}\left[\frac{d^3x}{dz^3}.\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{d^2x}{dz^2}.\left(\frac{dz}{dt}\right)\right],$$

$$= \frac{-2}{t^3}\left[\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right] + \frac{1}{t^3}\left[\frac{d^3x}{dz^3} - \frac{d^2x}{dz^2}\right], \frac{dz}{dt} = \frac{1}{t}$$
$$= \frac{1}{t^3}\left[\frac{d^3x}{dz^3} - 3\frac{d^2x}{dz^2} + 2\frac{dx}{dz}\right],$$

es de decir,

$$t^3\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d^3x}{dz^3} - 3\frac{d^2x}{dz^2} + 2\frac{dx}{dz}. \qquad (30)$$

ahora reemplazando (27), (28) y (30) en (29) se obtiene,

$$a_0\left(\frac{d^3x}{dz^3} - 3\frac{d^2x}{dz^2} + 2\frac{dx}{dz}\right) + a_1\left(\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right) + a_2\frac{dx}{dz} + a_3x = f(e^z),$$

de esta forma se obtiene una ecuación diferencial lineal de tercer orden con coeficientes constantes,

$$a_0\frac{d^3x}{dz^3} + (-3a_0 + a_1)\frac{d^2x}{dz^2} + (2a_0 - a_1 + a_2)\frac{dx}{dz} + a_3x = f(e^z).$$

El caso general es posible obtener observando el comportamiento de las expresiones en los casos anteriores, de la transformación $t = e^z$, deduce entonces,

$$t\frac{dx}{dt} \text{ lleva a } \frac{dx}{dz},$$
$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} \text{ lleva a } \left(\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right),$$
$$t^3\frac{d^3x}{dt^3} \text{ lleva a } \left(\frac{d^3x}{dz^3} - 3\frac{d^2x}{dz^2} + 2\frac{dx}{dz}\right).$$

Entonces, veamos cómo es la expresión para el término general que se escribe como, $t^n\frac{d^nx}{dt^n}$ para n entero positivo. Al sustituir λ^k por $\frac{d^kx}{dt^k}$ cuando se toma $k = 1,2,3$ se observa que se va generando los factores: λ; $\lambda(\lambda-1)$; $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$; quiere decir que cuando $k = 1,2,3,4,\ldots,n$ se formará un polinomio de la forma,

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\ldots[\lambda-(n-1)].$$

Por lo tanto, se debe igualar el término $t^n\frac{d^nx}{dt^n}$ conforme al polinomio anterior de grado n; y las sustituciones en la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 41. Analice en que se convierte el término $t^5\frac{d^5x}{dt^5}$.

Solución. En este caso $n = 5$, de manera que corresponde al desarrollo del polinomio de grado cinco,

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4) = \lambda^5 - 10\lambda^4 + 35\lambda^3 - 50\lambda^2 + 24\lambda\,,$$

entonces ahora se sustituye cada λ por

$$\lambda \text{ por } \frac{dx}{dz},$$
$$\lambda^2 \text{ por } \frac{d^2x}{dz^2},$$
$$\lambda^3 \text{ por } \frac{d^3x}{dz^3},$$

$$\lambda^4 \text{ por } \frac{d^4x}{dz^4},$$
$$\lambda^5 \text{ por } \frac{d^5x}{dz^5}.$$

Por lo tanto, al igualar se obtiene la relación que se debe usar para

$$t^5\frac{d^5x}{dt^5} = \frac{d^5x}{dz^5} - 10\frac{d^4x}{dz^4} + 35\frac{d^3x}{dz^3} - 50\frac{d^2x}{dz^2} + 24\frac{dx}{dz}. \blacksquare$$

Ejemplo 43. Resuelve la ecuación diferencial $t^2\frac{d^2x}{dt^2} - 2t\frac{dx}{dt} + 2x = t^2$.

Solución. Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden del tipo Cauchy-Euler, entonces hagamos que $t = e^z$ con $t > 0$. En este caso se tiene

$$t\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz} \text{ y } t^2\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz},$$

sustituyendo en la ecuación,

$$\left(\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right) - 2\frac{dx}{dz} + 2x = (e^z)^2,$$

es decir, ahora la ecuación es de coeficientes constantes,

$$\frac{d^2x}{dz^2} - 3\frac{dx}{dz} + 2x = e^{2z},$$

ahora se tiene que resolver esta ecuación considerando que la variable independiente es z. La función complementaria o solución de la parte homogénea es

$$x_c(z) = c_1e^z + c_2e^{2z}.$$

Buscamos una integral particular aplicando el método de los coeficientes indeterminados. Se puede observar que el conjunto CI de e^{2z} es el conjunto $S_1 = \{e^{2z}\}$ que contiene a una solución de la parte homogénea, lo cual significa que este conjunto S_1 será modificado multiplicando a sus elementos por una potencia mínima de z, es decir,

$$S_1^* = \{ze^{2z}\}.$$

Se asume una solución de la forma

$$x_p(z) = Aze^{2z},$$

derivando dos veces: $x'_p(z) = Ae^{2z} + 2Aze^{2z}$, $\quad x''_p(z) = 4Ae^{2z} + 4Aze^{2z}$ y sustituyendo en la ecuación diferencial en z,

$$(4Ae^{2z} + 4Aze^{2z}) - 3(Ae^{2z} + 2Aze^{2z}) + 2Aze^{2z} \equiv e^{2z},$$

de donde se obtiene que $A = 1$, y por lo tanto, la solución particular se escribe $x_p(z) = ze^{2z}$; la solución general de la ecuación en z, es

$$x(z) = c_1e^z + c_2e^{2z} + ze^{2z}.$$

Finalmente deshaciendo el cambio $t = e^z$ se obtiene la solución de la ecuación diferencial en término de t,

$$x(t) = c_1 t + c_2 t^2 + t^2 \ln(t). \blacksquare$$

Ejemplo 43. Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$t^3 \frac{d^3x}{dt^3} - 4t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 8t \frac{dx}{dt} - x = 2\ln(t).$$

Solución. Obviamente es la ecuación diferencial de Cauchy-Euler; que haciendo $t = e^z$ para $t > 0$, se obtienen,

$$t \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz}\ ,\ t^2 \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\ \text{ y }\ t^3 \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d^3x}{dz^3} - 3\frac{d^2x}{dz^2} + 2\frac{dx}{dz},$$

sustituyendo en la ecuación,

$$\left(\frac{d^3x}{dz^3} - 3\frac{d^2x}{dz^2} + 2\frac{dx}{dz}\right) - 4\left(\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right) + 8\frac{dx}{dz} - x = 2z,$$

es decir, una ecuación es de coeficientes constantes,

$$\frac{d^3x}{dz^3} - 7\frac{d^2x}{dz^2} + 14\frac{dx}{dz} - 8x = 2z,$$

ecuación de tercer orden que se tiene que resolver considerando que la variable independiente es z. La función complementaria o solución de la parte homogénea es

$$x_c(z) = c_1 e^z + c_2 e^{2z} + c_3 e^{4z}.$$

Decidimos encontrar una integral particular aplicando el método de los coeficientes indeterminados. Del conjunto CI de z es el conjunto $S_1 = \{1, z\}$ al no contener una solución de la parte homogénea, se asume una solución de la forma

$$x_p(z) = Az + B,$$

derivando tres veces: $x'_p(z) = A$, $x''_p(z) = 0 = x'''_p(t)$ y sustituyendo en la ecuación diferencial en z,

$$(14A) - 8(Az + B) \equiv 2z,$$

como se cumple idénticamente, igualamos los coeficientes y se forma el sistema,

$$14\,A - 8B = 0,\ -8A = 2$$

de donde se obtiene que $A = -\frac{1}{4}, B = -\frac{7}{16}$, y por lo tanto, la solución particular se escribe $x_p(z) = -\frac{1}{4}z - \frac{7}{16}$; la solución general de la ecuación en z, es

$$x(z) = c_1 e^z + c_2 e^{2z} + c_3 e^{4z} - \frac{1}{4}z - \frac{7}{16}.$$

Finalmente deshaciendo el cambio $t = e^z$ se obtiene la solución de la ecuación diferencial en término de t,

$$x(t) = c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^4 - \frac{1}{4}\ln(t) - \frac{7}{16}. \blacksquare$$

Ejemplo 44. Resuelve el problema de valor inicial

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} - 6x = \ln(t), x(1) = \frac{1}{6}; x'(1) = -\frac{1}{6}.$$

Solución. Se trata de la ecuación diferencial de Cauchy-Euler; que haciendo $t = e^z$ para $t > 0$, se obtienen,

$$t\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz} \text{ y } t^2\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz} \ ,$$

sustituyendo en la ecuación,

$$\left(\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right) - 6x = \text{z},$$

es decir, una ecuación es de coeficientes constantes,

$$\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz} - 6x = z,$$

ecuación de segundo orden que se tiene que resolver considerando que la variable independiente es z. La función complementaria o solución de la parte homogénea es

$$x_c(z) = c_1e^{3z} + c_2e^{-2z}.$$

Decidimos encontrar una integral particular aplicando el método de los coeficientes indeterminados. Del conjunto CI de z es el conjunto $S_1 = \{1, z\}$ al no contener una solución de la parte homogénea, se asume una solución de la forma

$$x_p(z) = Az + B,$$

derivando dos veces: $x'_p(z) = A$, $x''_p(z) = 0$ y sustituyendo en la ecuación diferencial en z,

$$(-A) - 6(Az + B) \equiv z,$$

como se cumple idénticamente, igualamos los coeficientes y se forma el sistema,

$$-A - 6B = 0, \ -6A = 1$$

de donde se obtiene que $A = -\frac{1}{6}, B = \frac{1}{36}$, y por lo tanto, la solución particular se escribe $x_p(z) = -\frac{1}{6}z + \frac{1}{36}$; la solución general de la ecuación en z, es

$$x(z) = c_1e^{3z} + c_2e^{-2z} - \frac{1}{6}z + \frac{1}{36}.$$

Finalmente deshaciendo el cambio $t = e^z$ se obtiene la solución de la ecuación diferencial en término de t,

$$x(t) = c_1t^3 + c_2t^{-2} - \frac{1}{6}\ln(t) + \frac{1}{36}.$$

Por último, aplicamos las condiciones iniciales para encontrar $c_1 = \frac{1}{18}$, $c_2 = \frac{1}{12}$. Por tanto, la solución al problema de valor inicial es

$$x(t) = \frac{1}{18}t^3 + \frac{1}{12}t^{-2} - \frac{1}{6}\ln(t) + \frac{1}{36} \ ■$$

Ejemplo 45. Resuelve la ecuación diferencial $(t-1)^2\frac{d^2x}{dt^2} - 2(t-1)\frac{dx}{dt} - 4x = t$.

Solución. Se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden del tipo Cauchy-Euler, entonces hagamos primero que $t-1=v$. La ecuación cambia muy poco y queda

$$v^2\frac{d^2x}{dv^2}-2v\frac{dx}{dv}-4x=v+1,$$

ahora ya se puede hacer $v=e^z$ para $v>0$. En este caso se tiene

$$v\frac{dx}{dv}=\frac{dx}{dz} \text{ y } v^2\frac{d^2x}{dv^2}=\frac{d^2x}{dz^2}-\frac{dx}{dz},$$

sustituyendo en la ecuación,

$$\left(\frac{d^2x}{dz^2}-\frac{dx}{dz}\right)-2\frac{dx}{dz}-4x=e^z+1,$$

es decir, la ecuación es de coeficientes constantes,

$$\frac{d^2x}{dz^2}-3\frac{dx}{dz}-4x=e^z+1,$$

ahora se tiene que resolver esta ecuación considerando que la variable independiente es z. La función complementaria o solución de la parte homogénea es

$$x_c(z)=c_1e^{4z}+c_2e^{-z}.$$

Hallamos una integral particular aplicando el método de los coeficientes indeterminados. Se puede observar que el conjunto CI de e^z es el conjunto $S_1=\{e^z\}$ y de 1 es $S_2=\{1\}$, se asume una solución de la forma

$$x_p(z)=Ae^z+B,$$

derivando dos veces: $x'_p(z)=Ae^z$, $x''_p(z)=Ae^z$ y sustituyendo en la ecuación diferencial en z,

$$(Ae^z)-3(Ae^z)-4(Ae^z+B)\equiv e^z+1,$$

de donde se obtiene que $-6A=1$ y $-4B=1$, y por lo tanto, la solución particular se escribe $x_p(z)=-\frac{1}{6}e^z-\frac{1}{4}$; la solución general de la ecuación en z, es

$$x(z)=c_1e^{4z}+c_2e^{-z}-\frac{1}{6}e^z-\frac{1}{4},$$

deshaciendo el cambio $v=e^z$ se obtiene la solución de la ecuación diferencial en término de v,

$$x(v)=c_1v^4+c_2v^{-1}-\frac{1}{6}v-\frac{1}{4}.$$

Finalmente deshaciendo el cambio $t-1=v$ resulta la solución general

$$x(t)=c_1(t-1)^4+c_2(t-1)^{-1}-\frac{1}{6}(t-1)-\frac{1}{4} \blacksquare$$

Ejemplo 46. Resuelve la ecuación diferencial $t^2\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}-n^2x=t$.

Solución. Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden del tipo Cauchy-Euler, entonces hagamos que $t=e^z$ con $t>0$. En este caso se tiene

$$t\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dz} \text{ y } t^2\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{dz^2}-\frac{dx}{dz},$$

sustituyendo en la ecuación,

$$\left(\frac{d^2x}{dz^2}-\frac{dx}{dz}\right)+\frac{dx}{dz}-n^2x=e^z,$$

es decir, ahora la ecuación es de coeficientes constantes,

$$\frac{d^2x}{dz^2}-n^2x=e^z,$$

ahora se tiene que resolver esta ecuación considerando que la variable independiente es z. La función complementaria o solución de la parte homogénea es

$$x_c(z)=c_1e^{nz}+c_2e^{-nz}.$$

Buscamos una integral particular aplicando el método de los coeficientes indeterminados. Se puede observar que el conjunto CI de e^z es el conjunto $S_1=\{e^z\}$, aquí se presenta dos casos: a) Si $n\neq 1, n\neq -1$, el conjunto S_1no contiene a la solución de la parte homogénea; b) si $n=1, n=-1$, el conjunto S_1 contiene a la solución de la parte homogénea.

CASO a): Si $n\neq 1, n\neq -1$; la solución integral presentará la forma de

$$x_p(z)=Ae^z,$$

derivando dos veces: $x'_p(z)=Ae^z$, $x''_p(z)=Ae^z$ y sustituyendo en la ecuación diferencial en z,

$$(Ae^z)-n^2Ae^z\equiv e^z,$$

de donde se obtiene que $A=\frac{1}{1-n^2}$, y por lo tanto, la solución particular se escribe $x_p(z)=\frac{1}{1-n^2}e^z$; la solución general de la ecuación en z, es

$$x(z)=c_1e^{nz}+c_2e^{-nz}+\frac{1}{1-n^2}e^z,$$

pero como $t=e^z$, se obtiene la solución general,

$$x(z)=c_1t^n+c_2t^{-n}+\frac{1}{1-n^2}t. \blacksquare$$

CASO b): Si $n=1, n=-1$, en este caso el conjunto S_1 contiene a la solución de la parte homogénea, lo cual significa que este conjunto S_1 será modificado multiplicando a sus elementos por una potencia mínima de z, es decir,

$$S_1^*=\{ze^z\}.$$

Se asume una solución de la forma

$$x_p(z)=Aze^z,$$

derivando dos veces: $x'_p(z)=Ae^z+Aze^z$, $x''_p(z)=2Ae^z+Aze^z$ y sustituyendo en la ecuación diferencial en z,

$$(2Ae^z + Aze^z) - n^2Aze^z \equiv e^z,$$

de donde se obtiene que $2A = 1$, y por lo tanto, la solución particular se escribe $x_p(z) = \frac{1}{2}ze^{2z}$; la solución general de la ecuación en z, es

$$x(z) = x(z) = c_1e^{nz} + c_2e^{-nz} + \frac{1}{2}ze^z.$$

Finalmente deshaciendo el cambio $t = e^z$ se obtiene la solución de la ecuación diferencial en término de t,

$$x(t) = c_1t + c_2t^{-1} + \frac{1}{2}t\ln(t). \blacksquare$$

Ejemplo 47. Resuelve la ecuación diferencial $(t+2)^2\frac{d^2x}{dt^2} + 3(t+2)\frac{dx}{dt} - 3x = 2t$.

Solución. Se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden del tipo Cauchy-Euler, entonces hagamos primero que $t + 2 = v$. La ecuación queda así

$$v^2\frac{d^2x}{dv^2} + 3v\frac{dx}{dv} - 3x = 2v - 4,$$

ahora ya se puede hacer $v = e^z$ para $v > 0$. En este caso se tiene

$$v\frac{dx}{dv} = \frac{dx}{dz} \text{ y } v^2\frac{d^2x}{dv^2} = \frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz},$$

sustituyendo en la ecuación,

$$\left(\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right) + 3\frac{dx}{dz} - 3x = 2e^z - 4,$$

es decir, la ecuación es de coeficientes constantes,

$$\frac{d^2x}{dz^2} + 2\frac{dx}{dz} - 3x = 2e^z - 4,$$

ahora se tiene que resolver esta ecuación considerando que la variable independiente es z. La función complementaria es

$$x_c(z) = c_1e^z + c_2e^{-3z}.$$

Hallamos una integral particular aplicando el método de los coeficientes indeterminados. Se puede observar que el conjunto CI de e^z es el conjunto $S_1 = \{e^z\}$ y de 1 es $S_2 = \{1\}$; pero vemos que el conjunto S_1 contiene a la solución complementaria, luego al modificar queda $S_1^* = \{ze^2\}$, entonces se asume una solución de la forma

$$x_p(z) = Aze^z + B,$$

derivando dos veces: $x'_p(z) = Ae^z + Aze^z$, $x''_p(z) = 2Ae^z + Aze^z$ y sustituyendo en la ecuación diferencial en z,

$$(2Ae^z + Aze^z) + 2(Ae^z + Aze^z) - 3(Aze^z + B) \equiv 2e^z - 4,$$

de donde se obtiene que $4A = 2$ y $-3B = -4$, y por lo tanto, la solución particular se escribe $x_p(z) = \frac{1}{2}ze^z + \frac{4}{3}$; la solución general de la ecuación en z, es

$$x(z) = c_1 e^z + c_2 e^{-3z} + \frac{1}{2} z e^z + \frac{4}{3},$$

deshaciendo el cambio $v = e^z$ se obtiene la solución de la ecuación diferencial en término de v,

$$x(v) = c_1 v + c_2 v^{-3} + \frac{1}{2} v ln(v) + \frac{4}{3}.$$

Finalmente deshaciendo el cambio $t + 2 = v$ resulta la solución general

$$x(t) = c_1(t+2) + c_2(t+2)^{-3} + \frac{1}{2}(t+2)ln|t+2| + \frac{4}{3} \blacksquare$$

Ejemplo 48. Resuelve la ecuación diferencial $t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} + x = \sec(\ln(t))$.

Solución. Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden del tipo Cauchy-Euler, entonces hagamos que $t = e^z$ con $t > 0$. En este caso se tiene

$$t\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz} \text{ y } t^2\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz},$$

sustituyendo en la ecuación,

$$\left(\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz}\right) + \frac{dx}{dz} + x = \sec(\ln(e^z),$$

es decir, ahora la ecuación es de coeficientes constantes,

$$\frac{d^2x}{dz^2} + x = \sec(z),$$

ahora se tiene que resolver esta ecuación considerando que la variable independiente es z. La solución de la parte homogénea es

$$x_c(z) = c_1 senz + c_2 cosz.$$

Buscamos una integral particular aplicando el método de variación de parámetros, se asume como solución particular

$$x_p(z) = v_1(z)senz + v_2(z)cosz,$$

ya se tiene resultados para encontrar las funciones $v_1(z)$ y $v_2(z)$ que son la aplicación de las integrales

$$v_1(z) = \int \frac{-x_2(z)f(z)}{a_0(z)w(x_1,x_2)(z)} dz = \int \frac{-cosz.secz}{-1} dz$$
$$= \int dz = z,$$

es decir $v_1(z) = z$.

Es conocidos los datos: $f(z) = secz$, $x_1(z) = senz$, $x_2(z) = cosz$, $a_0(z) = 1$, y el wronskiano se calcula por la determinante,

$$w(x_1, x_2)(z) = \begin{vmatrix} senz & cosz \\ cosz & -senz \end{vmatrix} = -1.$$

Similarmente,

$$v_2(z) = \int \frac{x_1(z)f(z)}{a_0(z)w(x_1,x_2)(z)} dz = \int \frac{senz.secz}{-1} dz$$
$$= \int \frac{-senz}{cosz} dz = \ln|cosz|,$$

es decir,

$$v_2(z) = \ln|cosz|,$$

reemplazando $v_1(z), v_2(z)$ en (1) se tiene la solución particular y queda así,

$$x_p(z) = zsenz + (ln|cosz|)cosz.$$

Por consiguiente, la solución general de la ecuación en z, es

$$x(z) = c_1senz + c_2cosz + zsenz + (ln|cosz|)cosz.$$

Finalmente deshaciendo el cambio $t = e^z$ se obtiene la solución de la ecuación diferencial en término de t,

$$x(t) = c_1sen(\ln(t) + c_2\cos(lnt) + \ln(t)sen(lnt) + (ln|\cos(lnt)|)\cos(lnt),$$

es decir,

$$x(t) = (c_1 + \ln(t))sen(lnt) + (c_2 + ln|\cos(lnt)|)\cos(lnt).$$ ■

PROBLEMAS 5.6

Resuelve las ecuaciones diferenciales:

a) $t^2x'' - 4tx' + 6x = t^{-1}$.

R. $x(t) = c_1t^2 + c_2t^3 + \frac{1}{12}t^{-1}$.

b) $x^2y'' - xy' + 2y = xln(x)$.

c) $(1+t)^3x''' + (1+t)^2x'' + 1 + t)x' = 8x + \frac{t}{(1+t)^2}$.

R. $x(t) = c_1(1+t)^2 + c_2cos(ln(1+t)^2) + c_2sen(ln(1+t)^3) - \frac{1}{15(1+t)} + \frac{1}{32(1+t)^2}$.

d) $t^2x'' - tx' + x = tln^3(t)$.

e) $t^3x''' = t^2x'' - 2tx' + 2x + t^3$.

R. $x(t) = (c_1 + c_2\ln(t))t + c_3t^2 + \frac{t^3}{4}$.

f) $t^2\frac{d^2x}{dt^2} - t\frac{dx}{dt} + x = 4tln(t)$.

R. $x(t) = c_1t + c_2tln(t) + \frac{2}{3}t(\ln(t))^3$.

g) $t^2x'' = 6x + \ln(t); t > 0, x(1) = \frac{1}{6}, x'(1) = -\frac{1}{6}$.

R. $x(t) = \frac{1}{6}\left[\frac{t^{-2}}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln(t) + \frac{1}{6}\right]$.

h) $t^2x'' - 2x = t^2$.

R. $x(t) = c_1t^2 + c_2t^{-1} - \frac{1}{9}t^2 + \frac{1}{3}t^2\ln(t)$.

i) $t^3x''' - t^2x'' = -2tx' + 2x + t^3$.

R. $x(t) = c_1t + c_2tln(t) + c_3t^2 + \frac{1}{4}t^3$.

j) $(2t-3)^2x'' - 6(2t-3)x' + 12x = 0$.

R. $x(t) = c_1(3t-3)^3 + c_2(2t-3)$.

k) $t^2x'' - 4tx' + 6x = 0$; $x(2) = 0, x'(2) = 4$.

R. $x(t) = -2t^2 + t^3$.

***

CAPITULO 6

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

6.1 INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales tienen una importancia fundamental en la Matemática para la ingeniería, la razón es que muchos problemas se expresan a través de leyes y relaciones físicas. Precisamente en este capítulo estudiaremos, como mediante situaciones físicas se deducen una ecuación diferencial de segundo orden; es decir, obtener un modelo matemático para luego buscar una solución e interpretación.

Isacc Newton, en 1687, en su monumental obra, *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, estableció (entre otros) leyes y principios, los que rigen el movimiento de los cuerpos sujeto a la acción de una fuerza. Estas leyes son: a) todo cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza se mueve con velocidad constante; b) si sobre un cuerpo de masa m actúa una fuerza F, entonces el cuerpo experimenta una aceleración a originando la ley $F = ma$; c) toda fuerza (acción) se le opone otra fuerza de la misma magnitud y de sentido contrario (reacción); es la ley de acción y reacción.

Estas tres leyes, junto con la ley de gravitación universal, que señala que "*la fuerza ejercida por un cuerpo de masa M sobre otro de masa m es directamente proporcional al producto de ambas masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia*", forma la base de la mecánica; partiendo de ellas se puede deducir el comportamiento dinámico de los cuerpos bajo la acción de la fuerza de la gravedad (Holmann, 1960).

6.2 VIBRACIONES ARMÓNICAS SIMPLES NO AMORTIGUADAS

Una masa m está sujeta a una pared mediante un resorte o muelle. Este muelle ejerce sobre el objeto una fuerza de recuperación F_m. Las vibraciones del objeto se producen a consecuencia de la pérdida del equilibrio del sistema; las fuerzas

presentes en el sistema tenderán a recuperar el equilibrio. Dependiendo de cuáles sean esas fuerzas se presentan distintos casos. Cuando el peso está en reposo, describimos su posición como la posición de equilibrio.

Supongamos que la superficie es lo suficientemente lisa como para despreciar la fuerza de rozamiento. La única fuerza presente en el sistema es la del muelle donde k es una constante positiva que depende de la rigidez del muelle. El resorte no ejerce fuerza cuando el cuerpo se encuentra en posición de equilibrio $x = 0$; pero si se desplaza una distancia x, el resorte ejerce una fuerza restauradora $-kx$, entonces tendremos $F_m = -kx(t)$ (Goddington, 1973).

Es decir, en este caso, las únicas fuerzas que actúan: a) una fuerza de restitución, opuesta a la dirección del alargamiento y proporcional a su magnitud, y b) el peso del cuerpo, dado por $w = mg$. Adoptaremos como convención que todas las cantidades (desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza) medidas hacia abajo desde la posición de equilibrio se consideran como positivas. Las que se miden hacia arriba, son negativas.

La Ley Hooke: La fuerza que actúa sobre un objeto causada por un resorte tiene una magnitud proporcional a la elongación del resorte a partir de su longitud natural y de sentido opuesto a la elongación.

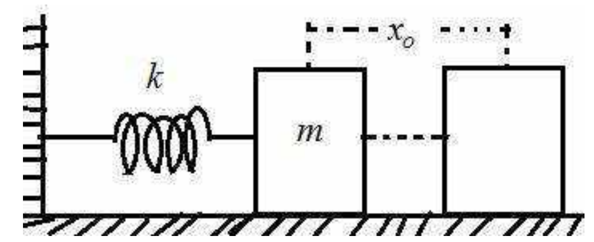


Figura 6.1: Vibraciones armónicas simple.

En este caso, la segunda ley de Newton señala que la fuerza total que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por su aceleración, es decir

$$mx''(t) = F_m.$$

Por otro, el problema de valor inicial que modela las vibraciones del objeto es la ecuación

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0,\ \ x(0) = x_0, x'(0) = v_0,$$

es la ecuación diferencial del movimiento armónico simple o movimiento vibratorio no amortiguado que cumplen dos condiciones iniciales $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$, que representa el desplazamiento y velocidades iniciales respectivamente. Digamos que, si $x_0 < 0$ y $v_0 > 0$ entonces el movimiento se

inicia en un punto que está $|x_0|$ unidades arriba de la posición de equilibrio y con una velocidad dirigida hacia abajo. Si $x_0 > 0$ y $v_0 = 0$, la masa está inicialmente en reposo a x_0 unidades debajo de la posición de equilibrio, figura 6.2.

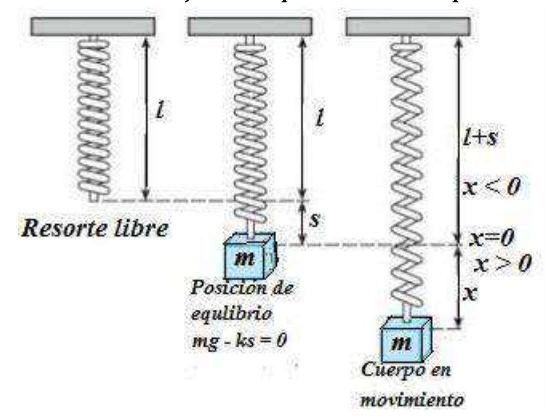


Figura 6.2: Sistema masa resorte**.**

La ecuación tiene raíces imaginarias puras, en consecuencia, la solución general está dado por

$$x(t) = c_1 cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \qquad (1)$$

siendo c_1 y c_2 constantes a determinar y que dependen de x_0 y v_0. Haciendo $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$, una solución alternativa también se escribe

$$x(t) = Acos(wt - \varphi),$$

siendo $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ es la amplitud de la onda periódica, y φ ángulo de fase, tal que $cos\varphi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$ y $sen\varphi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$. Independientemente de los valores de c_1 y c_2, la ecuación del movimiento armónico simple (1), define una función periódica de período $T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ y describe un movimiento ideal en el que el cuerpo se mueve alternadamente hacia arriba y hacia debajo de la posición de equilibrio, infinitas veces. El período T es el tiempo necesario para que se complete un ciclo y su recíproco $f = \frac{1}{T}$ se denomina la *frecuencia*, y la frecuencia angular es $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Ahora si las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$, entonces se tiene $c_1 = x_0$ y $v_0 = c_2 w$. Es decir, la solución con estas condiciones iniciales es

$$x(t) = x_0 cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{v_0}{w} sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right),$$

también cuando si $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la ecuación se escribe

$$x(t) = x_0 cos(wt) + \frac{v_0}{w} sen(wt),$$

El desplazamiento máximo del cuerpo, medido desde la posición de equilibrio, se llama *amplitud*, con un poco de paciencia se puede calcular la amplitud $A = \frac{\sqrt{x_0^2 w^2 + v_0^2}}{w}$, el ángulo de fase φ es tal que $cos\varphi = \frac{x_0 w}{\sqrt{x_0^2 w^2 + v_0^2}}$ y $sen\varphi = \frac{v_0}{\sqrt{x_0^2 w^2 + v_0^2}}$.

Una forma más fácil de obtener φ es de $tan\varphi = \frac{v_0}{x_0 w} = \frac{c_2}{c_1}$.

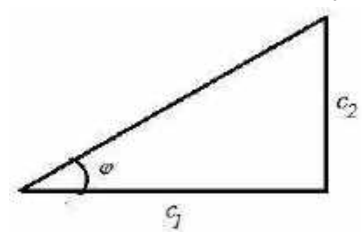


Figura 6.3: Relación de las constantes con el ángulo de fase.

Se puede probar que $x(t) = Acos(wt - \varphi)$, usando la identidad coseno de la suma de ángulos

$$\begin{aligned} Acos(wt - \varphi) &= A[\cos(wt)\cos(\varphi) + sen(wt)sen(\varphi)] \\ &= Acos(\varphi)\cos(wt) + Asen(\varphi)sen(wt) \\ &= c_1 \cos(wt) + c_2 sen(wt) = x(t). \end{aligned}$$

Respecto de la solución alternativa $x(t) = Acos(w - \varphi)$, también se puede escribir $x(t) = Asen(w + \varphi_1)$, equivalencia que se obtiene con recordar que las funciones seno y coseno están desfasados un ángulo de $\frac{\pi}{2}$, es decir $sen(\theta) = cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$. Hacemos otras aclaraciones, la solución $x(t)$ toma valores en el intervalo $[-A, A]$ ya que $-1 \leq sen\theta \leq 1$ con $\theta \in IR$, esto es $|sen(\theta)| \leq 1$, por tanto

$$|sen(wt + \varphi)| \leq 1$$

al ser $A > 0$ (amplitud),

$$|Asen(wt + \varphi)| \leq A,$$

entonces $|x(t)| \leq A$ y es cierto que $-A \leq x(t) \leq A$, esto quiere decir que A es la máxima separación del cuerpo con respecto a la posición de equilibrio, de modo

que A es la amplitud (máxima) de oscilaciones. Este desplazamiento máximo ocurre si $|x(t)| = A$, es decir

$$|sen(wt+\varphi)| = 1,$$
$$sen(wt+\varphi) = \pm 1,$$
$$wy+\varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ con } n \in Z$$

Por tanto

$$t = \frac{(2n+1)\pi}{2w} - \frac{\varphi}{w},\ n \in Z, t \geq 0,$$

De esta forma $x(t) = A$ si n es par, $x(t) = -A$ si n es impar. A la diferencia entre dos tiempos consecutivos donde $x(t) = A$ se le denomina *periodo* de la función $x(t)$ y al movimiento realizado en dicho intervalo de tiempo se le denomina oscilación completa; es decir, el periodo T es el (intervalo de) tiempo que tarda la masa m en dar una oscilación completa.

Problema. Demuestre que $T = \frac{2\pi}{w}\ s$.

Demostración. De $x(t) = Asen(wt+\varphi)$ se tiene

$$x(t+T) = Asen(w(t+T)+\varphi),$$
$$= Asen\left(w\left(t+\frac{2\pi}{w}\right)+\varphi\right),$$
$$x(t+T) = Asen[wt+2\pi+\varphi] = Asen(wt+\varphi) = x(t).$$

Por tanto $x(t+T) = x(t)$ si $T = \frac{2\pi}{w}\ s$.■

La masa m tarda T segundos en dar una *oscilación completa*, ¿Cuántas veces oscilara en un segundo? Al número f de oscilaciones que da el oscilador armónico en la unidad de tiempo se le llama frecuencia del oscilador, y se da por la proporción

$$\frac{1\ oscilaciones}{T\ segundos} = \frac{f\ oscilaciones}{1\ segundo},$$

es decir,

$$f = \frac{1\ oscilaciones}{T\ segundos} = \frac{\frac{1}{T}ciclo}{s} = \frac{w}{2\pi}\ hertz\ (H),$$

naturalmente, la frecuencia f del oscilador es diferente a la frecuencia natural w del sistema. El número real φ se le denomina *ángulo de fase*, ya que está asociado con el desfasamiento $\frac{\varphi}{w}$ que existe entre las curvas $x(t) = sen(wt)$ y $x(t) = sen(wt+\varphi)$.

Ejemplo 1. Considerando una masa $0{,}5\ kg$ y constante $k = 50\ N/m$, con una posición inicial de $x(0) = 0{,}5\ m$ y velocidad inicial $x'(0) = -10\ m/s$. Tenemos la ecuación diferencial del movimiento

$$x''(t)+\frac{k}{m}x(t)=x''(t)+\frac{50}{0,5}x(t)=0\,,$$

es decir

$$x''(t)+100x(t)=0\,,$$

al ser $w=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{50}{0,5}}=10$, se tiene la solución general

$$x(t)=c_1\cos(wt)+c_2sen(wt)=c_1\cos(10t)+c_2sen(10t),$$

que aplicando las condiciones iniciales se obtiene, si $x(0)=0,5$ se obtiene $c_1=\frac{1}{2}$ y $x'(0)=-10$ se obtiene $c_2=-1$. Por tanto, la ecuación del movimiento es

$$x(t)=\frac{1}{2}\cos(10t)-sen(10t),$$

o bien, usando la forma alternativa es

$$x(t)=\frac{\sqrt{5}}{2}cos(10t-\varphi),$$

donde la amplitud $A=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, siendo $tan\varphi=\frac{v_0}{x_0w_0}=\frac{-10}{0,5x10}=-2$. ■

Ejemplo 2. Una fuerza de 400 N estira un resorte 2 m. una masa de 50 kg se sujeta al extremo del resorte y se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 10 m/s. Obtener la ecuación del movimiento.

Solución. Tenemos los datos: $F=400\ N$, $x=2\ m$, masa 50 kg, $v=10\ m/s$, $k=\frac{F}{x}=\frac{400}{2}=200$, $w^2=\frac{k}{m}=\frac{200}{50}=4$, $x(0)=2$, $x'(0)=v(0)=-10$, entonces la ecuación diferencial,

$$50x''(t)+200x(t)=0,$$

es decir,

$$x''(t)+4x(t)=0,$$

cuya solución general es de la forma

$$x(t)=c_1\cos(wt)+c_2sen(wt)=c_1\cos(2t)+c_2sen(2t)$$

aplicando la condiciones iniciales $x(0)=2$, $x'(0)=-10$ se obtiene las constantes $c_1=2$ y $c_2=-5$. Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t)=2\cos(2t)-5sen(2t)\ .■$$

Ejemplo 3. Resuelve e interpreta el problema de valor inicial $x''(t)+16x(t)=0$ con $x(0)=10$, $x'(0)=0$.

Solución. La ecuación se interpreta así: se estira hacia abajo de un cuerpo que pende de un resorte hasta que esté 10 unidades bajo la posición de equilibrio y luego se le retiene hasta $t=0$; se le suelta a continuación de manera que parta de un estado de reposo.

La solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1\cos(4t) + c_2 sen(4t)$$

y, aplicando las condiciones iniciales $x(0) = 10$ y $x'(0) = 0$ se obtienen las constantes $c_1 = 10$ y $c_2 = 0$. Por tanto, la ecuación de movimiento queda

$$x(t) = 10\cos(4t).$$

Figura 6.4: Sistema en movimiento.

Esta solución muestra que una vez que el sistema se pone en movimiento, permanece en tal estado, con la masa deslizándose alternadamente 10 unidades hacia cada lado de la posición de equilibrio; el periodo de oscilación es $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ segundos (figura 6.4). ■

Ejemplo 4. Se encontró experimentalmente que un peso de 4 libras estira un resorte 6 pulgadas. Si el peso se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia debajo de 4 pulg/s, determine, a) la ecuación diferencial y condiciones iniciales que describan el movimiento, b) la ecuación del movimiento; c) la posición, velocidad y aceleración del peso 2 segundos después; d) el período, la frecuencia y la gráfica de la solución.

Solución. En vista de 6 pulgadas equivalen a $\frac{1}{2}ft$, según la Ley de Hooke se obtiene $4 = (k)(\frac{1}{2})$, de donde $k = 8\frac{lb}{ft}$. Además se tiene $m = \frac{w}{g} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}slug$.

La ecuación diferencial que describe el movimiento es

$$x''(t) + 64x(t) = 0,$$

sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 0, x'(0) = \frac{1}{3}$. ■

Por otro lado, como la ecuación auxiliar tiene raíces complejas $r = \pm 8i$, entonces la solución general se escribe

$$x(t) = c_1\cos(8t) + c_2 sen(8t),$$

la condición inicial $x(0) = 0$ no da $c_1 = 0$, mientras que $x'(0) = \frac{1}{3}$ implica que $c_2 = \frac{1}{24}$. Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = \frac{1}{24}sen(8t). \blacksquare$$

Para encontrar la posición, la velocidad y la aceleración del peso al cabo de 2 segundos, evaluamos

$$x(2) = \frac{1}{24} sen(16 = -0{,}011996\,,$$

$$x'(2) = \frac{1}{3}\cos(16) = -0{,}31922$$

$$x''(2) = -\frac{8}{3} sen(16) = 0{,}76774\,,$$

lo cual señala que el cuerpo se encuentra a 0,011996 ft arriba de la posición de equilibrio moviéndose hacia arriba. ■

El periodo es $T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ y la frecuencia es $f = \frac{4}{\pi}$, mientras que la amplitud se calcula $A = \frac{1}{24}\ ft$. La solución señala que una vez que el sistema se pone en movimiento, permanece en tal estado con la masa desplazándose alternadamente $\frac{1}{24}\ ft$ hacia cada lado de la posición de equilibrio $x = 0$, figura 6.5.

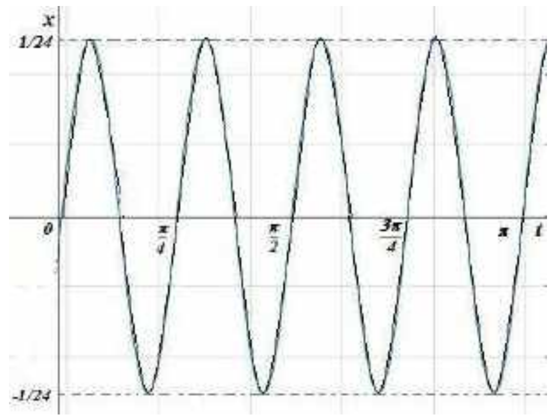


Figura 6.5: Movimiento del sistema**.**

Ejemplo 5. Un cuerpo que pesa libras, se estira un resorte 6 pulgadas. Dicho cuerpo se suelta en $t = 0$ desde un punto que está 8 pulgadas bajo la Posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de $\frac{4}{3}\ ft/s$. Determine la función que describe el movimiento libre resultante.

Solución. En este problema estamos usando el sistema de unidades inglesa gravitatoria, así que, magnitudes dadas en pulgadas deben expresarse en pie, así tenemos: $6\ pulgadas = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = pie$. Además, debemos convertir las unidades

de peso en unidades de masa; $M = \frac{w}{g}$, así $m = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ slug. Además por la ley de Hooke se tiene $2 = k(\frac{1}{2})$, decir $k = 4\ lb/ft$.

Por tanto, la ecuación diferencial es

$$mx''(t) + kx(t) = 0, \frac{1}{16}x''(t) + 4x(t) = 0,$$

es decir

$$x''(t) + 64x(t) = 0,$$

donde el desplazamiento y la velocidad inicial son $x(0) = \frac{2}{3}$, $x'(0) = -\frac{4}{3}$ el signo negativo señal que a la masa se da una velocidad inicial con dirección hacia arriba.

La solución es

$$x(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 sen(wt), w^2 = 64$$
$$x(t) = c_1 \cos(8t) + c_2 sen(8t),$$

aplicando las condiciones iniciales $x(0) = \frac{2}{3}$ da $c_1 = \frac{2}{3}$ y $x'(0) = -\frac{4}{3}$ da $c_2 = -\frac{1}{6}$.

Por tanto

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos(8t) - \frac{1}{6}sen(8t).\blacksquare$$

Observación. Es natural que no se realice diferencia entre peso y masa. En un problema se habla de movimiento de una masa sujeta a un resorte y también del movimiento de un peso sujeto a un resorte. En cuanto a la representación de la solución, es bueno usar la representación alternativa. Cuando $c_1 \neq 0$ y$c_2 \neq 0$, la amplitud real A de las oscilaciones libres no se obtienen en forma inmediata, para explicar mejor, se puede llevar la solución

$$x(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 sen(wt)$$

a la forma

$$x(t) = \frac{\sqrt{17}}{6}\cos(wt - \varphi)$$

donde la amplitud $A = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{6}$, el ángulo de fase se obtiene de $\tan(\varphi) = \frac{c_2}{c_1} = -\frac{1}{4}$, es decir $\varphi = \arctan(-\frac{1}{4})$.

Ejemplo 6. Una fuerza de 9 lb estira un resorte 3 pulgadas. Un cuerpo que pesa 24 lb se sujeta al resorte y se suelta desde un punto que está 3 pulgadas debajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 36 pulg/s; a) Obtener la ecuación de movimiento; b) ¿en qué momento pasa el cuerpo por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba por tercera vez?; c) ¿en qué instantes está el cuerpo 3 pulgadas debajo de la posición de equilibrio?

Solución. Se observa que se requiere convertir a pie las longitudes expresadas en pulgadas, mediante la equivalencia $1\,ft = 12\,pulg$, entonces $3\,pulg = \frac{1}{4}ft$. Por la Ley de Hooke, se obtiene el valor de constante $k = \frac{f_r}{d} = \frac{9}{1/4}\frac{lb}{ft} = 36\frac{lb}{ft}$, donde k es la constante de proporcionalidad, f_r es la fuerza de restitución y d la magnitud de alargamiento. Además, $m = \frac{w}{g} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}\,slug$ donde w peso del cuerpo y g la gravedad.

La unidad de *slug* se usa para medir la masa, cuando la fuerza se mide en libra-fuerza, 1 *slug* es la unidad de masa en el sistema de unidades pie - libra – segundo. El *slug* es la masa que se desplaza a una aceleración $1\,ft/s^2$ cuando se ejerce una fuerza de una libra sobre ella. De la ecuación $m = F/a$, se deduce que, 1 unidad de masa es igual a la unidad de fuerza/unidad de aceleración, así $1 = 1\frac{lbf.s^2}{ft}$. Por otro lado, hoy en día, la constante aceleración de una fuerza de gravedad de la tierra es aproximada a $9.80665\,m/s^2$; pero, también se utiliza otros valores como $32{,}16\,ft/s^2$.

La ecuación de movimiento se escribe

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = x''(t) + 48x(t) = 0,$$

que satisface las condiciones iniciales, al estirar $3\,pulg = \frac{1}{4}\,ft$ se tiene $x(0) = \frac{1}{4}$ y al dirigir la velocidad hacia arriba $36\frac{pulg}{s} = 3\frac{ft}{s}$, se tiene $x'(0) = -3$.

La solución general es

$$x(t) = c_1 cos\left(4\sqrt{3}t\right) + c_2 sen\left(4\sqrt{3}\,t\right),$$

y al resolver con valores iniciales, de $x(0) = \frac{1}{4}$ se obtiene $c_1 = \frac{1}{4}$ y de $x'(0) = -3$ resulta $c_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}$; entonces se tiene

$$x(t) = \frac{1}{4}cos\left(4\sqrt{3}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}sen\left(4\sqrt{3}\,t\right). \blacksquare$$

Para escribir esta solución en la forma alternativa debemos hallar la amplitud y el ángulo de fase, tenemos

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = arctan\left(\frac{c_2}{c_1}\right) = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3},$$

luego

$$x(t) = Acos(wt - \varphi) = \frac{1}{2}cos\left(4\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right). \blacksquare$$

Los instantes en las cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio está dado por las soluciones de la ecuación $x(t)=0$, es decir

$$\frac{1}{2}cos\left(4\sqrt{3}t+\frac{\pi}{3}\right)=0\ ,$$

de aquí

$$4\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}=arcos(0)=\frac{2n-1}{2}\pi-\frac{\pi}{3}\,,$$

entonces la sucesión de valores de t,

$$t_n=\frac{6n-5}{24\sqrt{3}}\pi\ ,n=1,2,3,4,\ldots$$

Así el tiempo pedido es

$$t_5=\frac{25}{24\sqrt{3}}\pi\approx 1{,}8894 \text{ segundos.}$$

Ahora debemos hallar los valores de t para los cuales $x(t)=\frac{1}{4}$, esto es

$$\frac{1}{2}cos\left(4\sqrt{3}t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}\,,$$

es decir $cos\left(4\sqrt{3}t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, de donde se aplica el arcocoseno, $4\sqrt{3}t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2n\pi$, o bien $4\sqrt{3}t+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}+2n\pi$. Por tanto, el cuerpo está a 3 pulgadas debajo de la posición de equilibrio en los instantes,

$$t_n=\frac{n\pi}{6}\sqrt{3},n=1,2,3,4,\ldots$$

$$t_k=\left(n+\frac{2}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{6},n=0,1,2,3,4,\ldots$$

se puede comprobar que en los tiempos t_n el cuerpo se mueve hacia arriba de la posición de equilibrio; mientras que en los tiempos t_k lo hace hacia abajo. ■

Por otro lado, si queremos hallar donde ocurre máximos y mínimos hay que hacer $x'(t)=0$, es decir

$$-\sqrt{3}sen\left(4\sqrt{3}t\right)-3cos\left(4\sqrt{3}t\right)=0,$$

es lo mismo que $tan\left(4\sqrt{3}t\right)=-\sqrt{3}$, de donde se obtiene

$$4\sqrt{3}t=\frac{2\pi}{3}+2n\pi\quad \text{y } 4\sqrt{3}t=\frac{5\pi}{3}+2n\pi,$$

así en los tiempos $t_n=\left(n+\frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{2\sqrt{3}},\ n=0,1,2,3,4,\ldots$ se presentan mínimos y es $-0{,}5$, sin embargo en los tiempos $t_k=\left(2k+\frac{5}{3}\right)\frac{\pi}{4\sqrt{3}},\ k=0,1,2,3,4,\ldots$ hay un máximo y es 0,5.

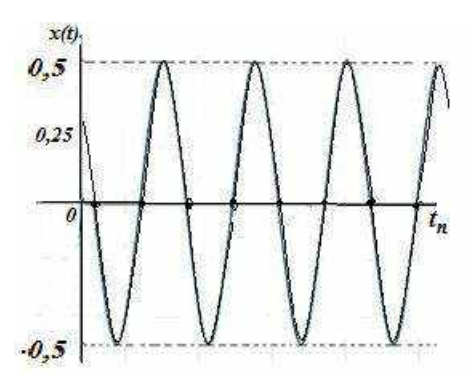


Figura 6.6: Ecuación del movimiento.

PROBLEMAS 6.1

1. Una fuerza de 10 N estira un resorte 0,124 m. Luego, al extremo libre de ese resorte se fija una masa de 5 kg; a) obtener la ecuación del movimiento si la masa se suelta desde un punto que está a 0,4 m arriba de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia debajo de 1,2 m/s; b) escribe la ecuación del movimiento en su forma alternativa; c) obtener el número de oscilaciones completas durante un intervalo de 8π segundos.
2. Considere una masa de 10 kg unida a una pared por medio de un resorte de constante $k = 10\ N/m$. Se alarga el resorte una distancia de 0,02 m y se suelta a partir del reposo, encontrar la posición y la velocidad de la masa en el tiempo, la frecuencia de oscilación, la amplitud, el ángulo de fase, la energía cinética y potencial en el tiempo t.

   R. $x(t) = 0{,}02\cos(t)$; $v(t) = -0{,}02sen(t)m/s$; $A = 0{,}02$; $f = \frac{1}{2\pi}hertz$; $\varphi = \frac{\pi}{2}\ rad$; $E_c = 0{,}002sen^2(t)$; $E_p = 0{,}0002cos^2(t)$.
3. Al sujetar una masa de 100 kg al extremo de un resorte, éste se estira 0,98 m. se retira la masa y se reemplaza por una de 40 kg, la cual se suelta desde un punto que está 0,6 m debajo de la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia arriba de 4 m/s; a) obtener la ecuación del movimiento; b) exprese la ecuación de movimiento en su forma alternativa, b) encuentre los instantes en las cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio; grafique la ecuación de movimiento.
4. Se sujetar un peso de 48 lb a un resorte, y éste se alarga 6 pulgadas y luego permanece en reposo. El cuerpo se desplaza 3 pulgadas por debajo de la

posición de equilibrio y luego se suelta; a) determinar la ecuación de movimiento; b) hallar el período de movimiento; c) ¿Cuántas oscilaciones completas realiza el cuerpo durante un intervalo de 8π segundos?

5. Considere una masa de 2 kg que está unida a una pared por medio de un resorte de constante $k = 200\ N/m$ que se comprime el resorte una distancia de 0,03 m y se suelta con una velocidad de $0{,}4\ m/s$ hacia la posición de equilibrio. Determine la posición y la velocidad de la masa en el tiempo, frecuencia de oscilación, la amplitud y el ángulo de fase.

R. $x(t) = -0{,}03\cos(10t) + 0{,}04sen(10t)$; $A = 0{,}05$; $\varphi = -0{,}6435\ rad$; $T = \frac{\pi}{5}\ s$; $f = \frac{5}{\pi}\ H$; $v(t) = x'(t) = 0{,}5cos(10t - 0{,}6435)$.

6. Determine la posición para la cual un peso sujeto a un movimiento armónico simple alcanza velocidad máxima. ¿Cuánto tiempo transcurre entre dos máximos o mínimos consecutivos?

7. Cuando se aplica a un resorte una fuerza de 28,8 N, éste se estira 0,2 m. un cuerpo de masa 9 kg se une al extremo libre de dicho resorte y es puesto en movimiento en posición inicial $x(0) = 0{,}1\ m$ y velocidad inicial $v(0) = -0{,}04\ m/s$. hallar la amplitud, la frecuencia natural, frecuencia de oscilación y el periodo del movimiento resultante.

R. $x(t) = 0{,}1\cos(4t) - 0{,}1sen(4t)$; $A = 0{,}1414\ m$; $w = 4\ rad/s$, $T = \frac{\pi}{2}\ s$; $f = \frac{2}{\pi}\ H$; $\varphi = 2{,}3562\ rad$.

8. Un cuerpo que pesa 20 libras sujeto al extremo de un resorte lo estira 0,32 ft. El peso se desplaza 6 pulgadas hacia debajo de la posición de equilibrio y desde ese lugar se le comunica una velocidad dirigida hacia arriba de 5 ft/s; a) determine la ecuación de movimiento; b) ¿en qué momento pasa el cuerpo por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba por tercera vez? ¿Qué velocidad lleva?; c) ¿en qué instante está el cuerpo $\frac{1}{3}$ ft debajo de la posición de equilibrio?; d) ¿en qué instante alcanza el cuerpo sus desplazamientos extremos hacia uno u otro lado de la posición de equilibrio?

9. Un resorte cuelga verticalmente de un techo, el resorte se elonga un centímetro cuando se pone masa de 1,5 kg y luego el sistema queda en equilibrio. Después se elonga el resorte una cantidad adicional de 1,5 cm y se suelta a partir del reposo. obtener la constante del resorte, la posición y la velocidad de la masa en el tiempo $t \geq 0$; halle la frecuencia y la amplitud del movimiento.

R. $x(t) = 0{,}015\cos(31{,}305t)$; $v(t) = -0{,}4695sen(31{,}305t)\ m/s$; $w = 31{,}305\ rad/s$; $T = 0{,}2007\ s$; $f \approx 4{,}9823$ oscilaciones por segundo; $A = 0{,}015\ m$.

10. Un peso de 25 lb estira un resorte 6 pulgadas. El resorte está suspendido de un techo y se encuentra en reposo. Posteriormente el peso se desplaza 4 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta con una velocidad de 2 ft/s, dirigida hacia arriba, a) escribir la ecuación de movimiento; b) obtener la ecuación de movimiento en su forma alternativa; c) ¿en qué momento el peso se encuentra $\frac{5}{24}$ ft debajo de la posición de equilibrio?

6.3 VIBRACIONES ARMÓNICAS AMORTIGUADAS

Vamos a considerar ahora el efecto de la resistencia del medio sobre la masa. El problema consiste en considerar el efecto de una fuerza de rozamiento. En el caso del sistema anterior consideremos que se agrega un sistema mecánico (amortiguador) que tiene el efecto de reducir la velocidad cuando el sistema se encuentra vibrando. El amortiguador ejerce una fuerza dependiendo de la velocidad de la masa, supongamos que sobre el cuerpo actúa una fuerza amortiguadora, dada por un múltiplo constante de la velocidad $\frac{dx}{dt}$.

Por simplicidad supongamos que esta fuerza en magnitud es proporcional a la rapidez. Supondremos que esta fuerza se opone al movimiento y es de magnitud proporcional a la velocidad, entonces la fuerza que ejerce el amortiguador para $c > 0$ es

$$F_0 = -cx'(t)$$

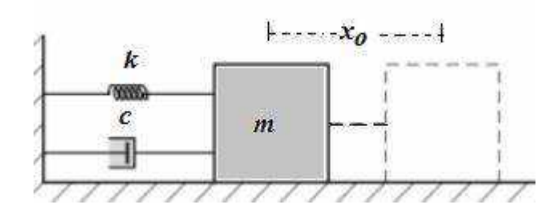


Figura 6.7: Sistema con fuerza de amortiguación.

Observando que el signo negativo indica que la fuerza de amortiguación va en sentido contrario a la del cuerpo. La fuerza total ejercida por la masa es $F_m + F_o$. De la segunda ley de Newton, en ausencia de fuerzas externas se tiene que

$$mx''(t) = -cx'(t) - kx(t),$$

es decir

$$x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

donde c es una constante de amortiguación. La misma ecuación diferencial modela el sistema masa-resorte cuando es colocado verticalmente.

La ecuación característica de la ecuación diferencial es

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0,$$

donde las dos raíces son

$$r_1 = \frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m} \text{ y } r_2 = \frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$$

El signo del radicando $c^2 - 4mk$ determina el tipo de movimiento del sistema:

a) **CASO I. Movimiento Sobre-Amortiguado**. Si $c^2 - 4mk > 0$, las raíces de la ecuación auxiliar son reales y distintas. En este caso la solución general es

$$x(t) = (c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}),$$

que representa un movimiento suave y no oscilatorio. Las dos funciones exponenciales son decrecientes y el sistema tiende rápidamente a su posición de equilibrio. Se comprueba que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Usando la condición inicial se tiene,

$$x(t) = \frac{x_0}{r_1-r_2}(r_1e^{r_1t} - r_2e^{r_2t}),$$

Algunas gráficas posibles de este caso se muestran en la figura 6.8.

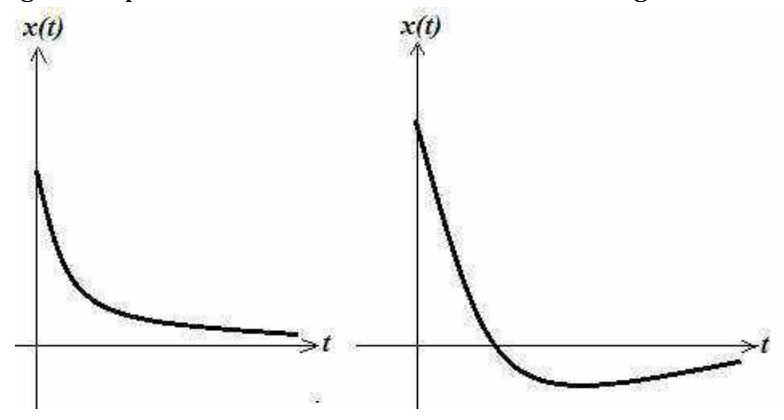


Figura 6.8: Movimiento sobreamortiguado.

b) **CASO II. Movimiento Críticamente amortiguado**. Si $c = \sqrt{4mk}$, en este caso la ecuación auxiliar presenta raíces de multiplicidad dos, es decir repetida, entonces la solución general es

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{r_1 t} = (c_1 + c_2 t)e^{\frac{-c}{2m}t}.$$

La función posición contiene un término exponencial decreciente multiplicado por una función lineal en el tiempo. Se espera que la posición decrezca hacia la posición de equilibrio sin vibrar, la manera como lo haga dependerá de las condiciones iniciales. Se comprueba que $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$; como en el caso anterior hay convergencia a cero, pero ahora puede ligeramente más lenta. En esta situación, una pequeña disminución de la fuerza de amortiguamiento produciría un movimiento oscilatorio. Aplicando las condiciones iniciales se tiene

$$x(t) = x_0 \left(1 + \frac{c}{2m}t\right) e^{\frac{-c}{2m}t}.$$

El gráfico de esta función es similar al de la función que obtuvimos en el caso anterior. En los últimos casos la masa vuelve a su estado de reposo sin oscilar.

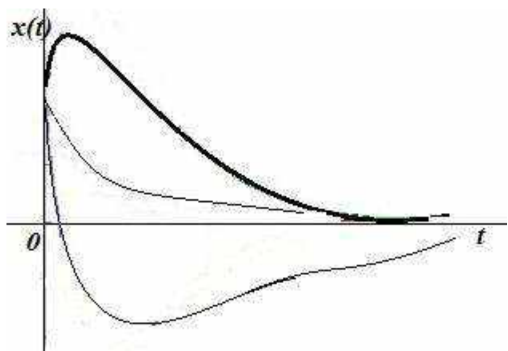


Figura 6.9: Movimiento críticamente amortiguado**.**

En los casos I y II, aplicando derivadas permite analizar que estas funciones pueden tener a lo más un máximo relativo o un mínimo relativo para $t > 0$, por lo que el cuerpo puede pasar a lo más una vez por la posición de equilibrio.

c) **CASO III: Movimiento subamortiguado**. Si $c^2 - 4mk < 0$, en este caso las raíces de la ecuación auxiliar son números complejos $r = -p \pm w_1 i$, en general las soluciones son

$$x(t) = e^{\frac{-c}{2m}t}\left[c_1 cos\left(\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}t\right) + c_2 sen\left(\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}t\right)\right],$$

pero haciendo $p = \frac{c}{2m}$, $w_1 = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \sqrt{w_0^2 - p^2}$ la solución para facilidad de análisis se escribe

$$x(t) = c_1 e^{-pt} cos(w_1 t) + c_2 e^{-pt} sen(w_1 t).$$

El valor $\frac{2\pi}{w_1}$ es conocido como seudoperíodo. Para unas condiciones iniciales dadas por $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$ se tiene $x_0 = c_1 + c_2$ y $v_0 = c_1 w_1 - p c_2$, lo que permite hallar los valores de c_1 y c_2.

Ahora, el movimiento es oscilatorio, pero la amplitud de las oscilaciones tiende a cero cuando t tiende a infinito. Por otro lado, también las soluciones se pueden expresar en forma compacta, conforme al siguiente teorema.

Teorema 6.1. Cualquier función de la forma $x(t) = c_1 e^{-pt} cos(w_1 t) + c_2 e^{-pt} sen(w_1 t)$ con $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, puede escribirse como

$$x(t) = A e^{-pt} cos(w_1 t - \varphi),$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y el ángulo de fase φ es tal que $sen(\varphi) = \frac{c_2}{A}$ y $cos(\varphi) = \frac{c_1}{A}$, además $\tan(\varphi) = \frac{c_2}{c_1}$. Dada la solución expresada en la forma alternativa, el coeficiente Ae^{-pt} se denomina la *amplitud amortiguada* de las soluciones, $\frac{2\pi}{\sqrt{4mk - c^2}}$ es el *cuasiperíodo* y expresión $\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2\pi}$ es la *cuasifrecuencia*. El *cuasiperiodo* es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos máximos sucesivos de $x(t)$, también es igual al doble de tiempo entre dos ceros sucesivos de la solución.

El sistema oscilará alrededor de la posición de equilibrio. Como el factor exponencial es decreciente, se espera que la amplitud de vibración sea cada vez más pequeña.

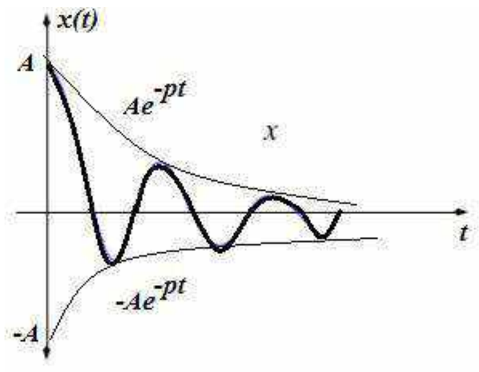


Figura 6.10: Vibraciones subamortiguada

Para representar graficamente la solución $x(t)$, hay que tomar en cuenta las siguientes observaciones; en primer lugar, la intersecciones con el eje t se obtienen resolviendo la ecuación $x(t) = 0$, decir

$$cos(w_1 t - \varphi) = 0\,,$$

de donde al ser $w_1 = \frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}$,

$$\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m} t - \varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}\,,$$

$$t_n = \frac{(2n+1)\pi + 2\varphi}{\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{m}}\,, n = 0,1,2,3,4, \ldots$$

Por otra parte, la gráfica de $x(t)$ es tangente a las curvas exponenciales $x_1(t) = Ae^{-pt}$ y $x_2(t) = -Ae^{-pt}$ en los valores de t, tales que

$$Ae^{-pt} cos(w_1 t - \varphi) = Ae^{-pt}\,,$$

y

$$Ae^{-pt} cos(w_1 t - \varphi) = -Ae^{-pt}\,,$$

es decir

$$cos(w_1 t - \varphi) = \pm 1$$

resolviendo la ecuación encontramos las soluciones que la sucesión

$$t_n = \frac{n\pi + \varphi}{w_1}\,, n \in IN,$$

donde $w_1 = \frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}$. ■

Ejemplo 7. Se encontró experimentalmente que un cuerpo de 4lb estira un resorte 6 pulgadas. El medio ofrece resistencia al movimiento del cuerpo numéricamente igual a 2,5 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si el peso se desplaza 4 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta.

Solución. Tenemos que $m = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} slug$, $k = \frac{4}{1/2}\frac{lb}{ft} = 8\frac{lb}{ft}$. la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{4}{32} x''(t) = -8x(t) - 2{,}5x'(t)\,,$$

es decir

$$x''(t) + 20x'(t) + 64x(t) = 0.$$

Esta ecuación diferencial cumple las condiciones inciales al ser 4pulgadas $\frac{1}{3} ft$, $x(0) = \frac{1}{3}$ y $x'(0) = 0$. Por otro lado la ecuación característica $r^2 + 20r + 64 = 0$ y tiene dos raíces reales distintos $r_1 = -4$ y $r_2 = -16$, así la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-16t}\,.$$

Sin embargo, las condición $x(0)=\frac{1}{3}$ da $c_1+c_2=\frac{1}{3}$ y $x'(0)=0$ nos lleva a $c_1+4c_2=0$, que resolviendo el sistema genera $c_1=\frac{4}{9}$ y $c_2=-\frac{1}{9}$. Por tanto, se tiene

$$x(t)=\frac{4}{9}e^{-4t}-\frac{1}{9}e^{-16t}. \blacksquare$$

Según lo analizado corresponde al caso I, se observa que no ocurren oscilaciones ya que el peso tiene suficiente amortiguamiento que regresa paulatinamente a la posición de equilibrio sin para por esta; es decir se trata de un movimiento sobreamortiguado; y claro es asíntótico $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$, la curva tiene una inflexión en $t=\frac{1}{4}\ln(4)$, figura 6.11.

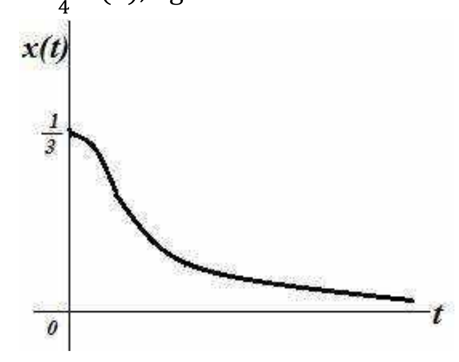


Figura 6.11: Solución con movimiento sobreamortiguado.

Ejemplo 8. Se encontró experimentalmente que un cuerpo de 4lb estira un resorte 6 pulgadas. El medio ofrece resistencia al movimiento del cuerpo numéricamente igual a 2 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si el peso se desplaza 4 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta.

Solución. Tiene datos similares al ejemplo 7, como $m=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}slug$, $k=\frac{4}{1/2}\frac{lb}{ft}=8\frac{lb}{ft}$. la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{4}{32}x''(t)=-8x(t)-2x'(t),$$

es decir

$$x''(t)+16x'(t)+64x(t)=0.$$

En este caso la ecuación diferencial cumple las condiciones iniciales al ser 4 pulgadas $\frac{1}{3}ft$, $x(0)=\frac{1}{3}$ y $x'(0)=0$. Por otro lado la ecuación característica $r^2+16r+64=0$ y tiene dos raíces reales distintos $r_1=-8=r_2$, así la solución general es

$$x(t) = c_1e^{-8t} + c_2te^{-8t} .$$

Sin embargo, las condición $x(0) = \frac{1}{3}$ da $c_1 = \frac{1}{3}$ y $x´(0) = 0$ nos lleva a $8c_1 + c_2 = 0$, que resolviendo $c_2 = \frac{8}{3}$. Por tanto, se tiene

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{8}{3}te^{-8t}. \blacksquare$$

Vemos que corresponde al caso II, pero tiene mucha similaridad con el ejemplo anterior y las graficas son parecido, sólo que tiene más caída, aunque ahora es un movimiento criticamente amortiguado; y claro es asíntótico $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, la curva tiene una inflexión en $t = \frac{1}{8}$, en la figura 6.12 las lineas discontinuas corresponde al ejemplo anterior.

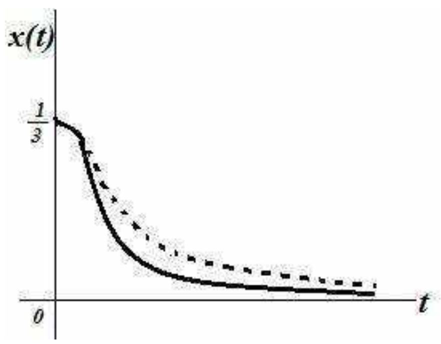


Figura 6.12: Solución con movimiento crítcamente amortiguado.

Ejemplo 9. Se encontró experimentalmente que un cuerpo de 4lb estira un resorte 6 pulgadas. El medio ofrece resistencia al movimiento del cuerpo numéricamente igual a 2 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si $x(0) = 0$ y $x´(0) = \frac{1}{3}$.

Solución. Tiene datos similares al ejemplo 8, como $m = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} slug$, $k = \frac{4}{1/2}\frac{lb}{ft} = 8\frac{lb}{ft}$. la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{4}{32}x´´(t) = -8x(t) - 2x´(t) ,$$

Es decir

$$x´´(t) + 16x´(t) + 64x(t) = 0.$$

En este problema lo que han sufrido modificaciones son las condiciones iniciales, el tipo de movimiento se conserva, pero algunas características si pueden cambiar, $x(0) = 0$ y $x´(0) = \frac{1}{3}$. Por otro lado la ecuación característica

$r^2 + 16r + 64 = 0$ y tiene dos raíces reales distintos $r_1 = -8 = r_2$, así la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{-8t} + c_2 te^{-8t} .$$

Sin embargo, las condición $x(0) = 0$ da $c_1 = 0$ y $x'(0) = \frac{1}{3}$ nos lleva a $c_2 = \frac{1}{3}$. Por tanto, se tiene

$$x(t) = \frac{8}{3} te^{-8t}. \blacksquare$$

Vemos que sigue el al caso II, es un movimiento criticamente amortiguado; y es asíntótico $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, al hacer $x'(t) = 0$ se observa que $x(t)$ alcanza un desplazamiento máximo en $t = \frac{1}{8}$ segundos y este máximo es $x\left(\frac{1}{8}\right) = 0{,}01533\ ft$, la curva tiene una inflexión en $t = \frac{1}{4}$, en la figura 6.12 las lineas discontinuas corresponde al ejemplo anterior.

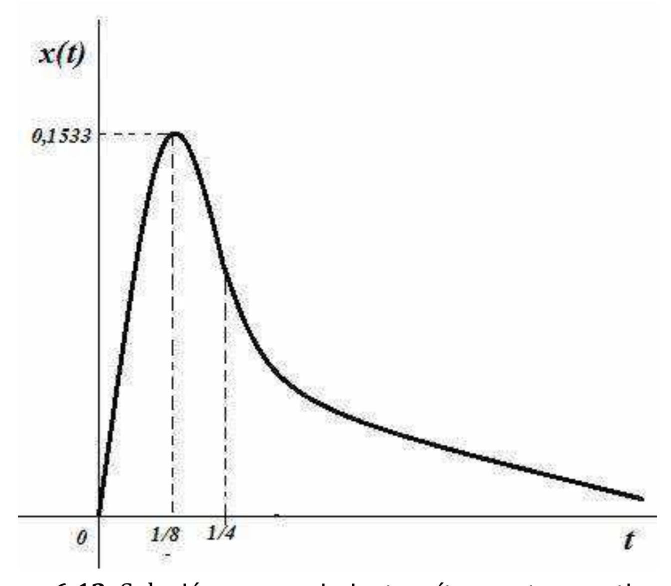


Figura 6.13: Solución con movimiento crítcamente amortiguado.

Ejemplo 10. Se encontró experimentalmente que un cuerpo de 4lb estira un resorte 6 pulgadas. El medio ofrece resistencia al movimiento del cuerpo numéricamente igual a 1 vez la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si el peso se desplaza 4 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta.

Solución. Tenemos que $m=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}slug, k=\frac{4}{1/2}\frac{lb}{ft}=8\frac{lb}{ft}$. la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{4}{32}x''(t)=-8x(t)-x'(t)\,,$$

es decir

$$x''(t)+8x'(t)+64x(t)=0.$$

Esta ecuación diferencial cumple las condiciones iniciales al ser 4pulgadas $\frac{1}{3}ft$, $x(0)=\frac{1}{3}$ y $x'(0)=0$. Por otro lado la ecuación característica $r^2+8r+64=0$ y tiene dos raíces complejas $r_1=-4+4\sqrt{3}i$ y $r_2=-4-4\sqrt{3}i$, así la solución general es

$$x(t)=e^{-4t}\left(c_1cos\left(4\sqrt{3}t\right)+c_2sen\left(4\sqrt{3}t\right)\right).$$

Sin embargo, las condición $x(0)=\frac{1}{3}$ da $c_1=\frac{1}{3}$ y $x'(0)=0$ nos lleva a $c_2=\frac{\sqrt{3}}{9}$. Por tanto, se tiene

$$x(t)=\frac{1}{9}e^{-4t}\left(3cos\left(4\sqrt{3}t\right)+\sqrt{3}sen\left(4\sqrt{3}t\right)\right).\ \blacksquare$$

Al tener la amplitud $A=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^2}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ la amplitud $\tan(\varphi)=\frac{\sqrt{3}/9}{1/3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, de donde $\varphi=\frac{\pi}{6}$, escribimos la solución alternativa

$$x(t)=\frac{2}{9}\sqrt{3}e^{-4t}cos\left(4\sqrt{3}t-\frac{\pi}{6}\right).$$

Por otro lado, las soluciones de la ecuación $x(0)=0$ están dadas por

$$4\sqrt{3}t-\frac{\pi}{6}=\frac{(2n-1)\pi}{2}, n=1,2,3,4,\dots$$

es decir, el cuerpo pasa por la posición de equilibrio en los momentos

$$t_n=\frac{3n-1}{12\sqrt{3}}\pi\,, n\epsilon IN.$$

Finalmente, la gráfica de $x(t)$ es tangente a las curvas exponenciales $x_1(t)=\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{-4t}$ y $x_2(t)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{-4t}$, esto es en los valores de t que cumplen

$$\frac{2}{9}\sqrt{3}e^{-4t}cos\left(4\sqrt{3}t-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{-4t}$$

y

$$\frac{2}{9}\sqrt{3}e^{-4t}cos\left(4\sqrt{3}t-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{-4t}\,,$$

es decir

$$cos\left(4\sqrt{3}t-\frac{\pi}{6}\right)=\pm 1\,,$$

de donde

$$4\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6} = k\pi,\ \ k = 0,1,2,3,4, \ldots,$$

Por tanto, $t_k = \frac{6k+1}{24\sqrt{3}}\pi\ , k = 0,1,2,3,4, \ldots$ ■

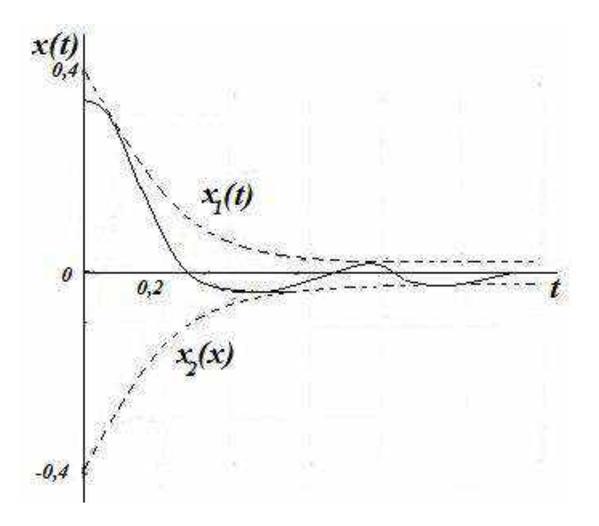


Figura 6.14: Solución con movimiento subamortiguado.

PROBLEMAS 6.2

1. Un peso de 2 lb está sujeto a un resorte el cual tiene una constante de elasticidad de 4 lb/ft. El peso se suelta desde un punto que se encuentra 6 pulgadas debajo de la posición con una velocidad dirigida hacia debajo de 2 ft/s, en un medio que presenta una resistencia al movimiento igual a la velocidad instantánea. Determine: a) La ecuación del movimiento; b) los instantes en los cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio; c) el desplazamiento extremo del peso; d) la gráfica de ecuación de movimiento.
2. Después de que un cuerpo que pesa 10 lb se sujeta a un resorte de 5 ft de largo, el resorte mide 7 ft. Se quita el cuerpo de 10 lb y se le reemplaza por uno de 8 lb. El sistema completo se coloca en un medio que ofrece una resistencia igual a la velocidad instantánea. a) encontrar la ecuación del movimiento si el peso se suelta desde un punto que se encuentra ½ ft debajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 1 ft/s; b) obtener los instantes en los cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio en dirección hacia abajo; c) graficar la ecuación del movimiento.

R. a) $x(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}(\cos(4t) + sen(4t)$ b) $t_n = \frac{(4n-1)}{16}\pi\,, n \in IN$.

3. Una masa de $\frac{1}{2}$ slug estira un resorte 4 ft y el medio que rodea al sistema masa resorte ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a $\frac{9}{2}$ veces la velocidad instantánea. el peso se suelta 6 pulgadas debajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de v_0 ft/s. ¿Cómo debe ser v_0 para que la masa pase por la posición de equilibrio?
4. Un peso de 8 lb estira un resorte 2 ft y el sistema se encuentra en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a δ veces la velocidad instantánea, siendo δ una constante positiva. (a) determinar el valor de δ para que el movimiento sea sobreamortiguado; (b) obtener el valor de δ para que el movimiento sea críticamente amortiguado; (c) calcular el valor de δ para que el movimiento sea subamortiguado.
5. Un peso de 16 lb estira un resorte de 4 ft, el sistema completo se sumerge en un medio viscoso que opone una fuerza de amortiguación numéricamente igual a tres veces la velocidad instantánea. (a) determinar la ecuación del movimiento si el peso se suelta desde un punto que está 1 ft arriba de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia debajo de 7 ft/s; (b) obtener el instante en que cruza por la posición de equilibrio, (c) Graficar la ecuación de movimiento.

6.4 MOVIMIENTO VIBRATORIO FORZADO

Este es un problema un poco más completo, los casos anteriores eran problemas de resorte dónde sólo había las fuerzas restauradoras y amortiguadora. Entonces veremos casos donde actúan otras fuerzas externas que cambian con el tiempo; esa tal fuerza puede ocurrir, digamos cuando el soporte que sostiene el resorte se mueve verticalmente de cierta manera fijada, parecido a un movimiento periódico o cuando al peso se le da un pequeño empuje cada vez que alcanza la posición más baja.

Además de las fuerzas de recuperación y de rozamiento sobre el sistema puede intervenir una fuerza externa dada por $F_e = f(t)$, entonces se tiene

$$mx''(t) = F_c + F_o + F_e,$$

es decir, de la segunda Ley de Newton

$$mx''(t) = -kx - cx'(t) + f(t)$$
$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f(t),$$

$$x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{f(t)}{m},$$

haciendo $2\lambda = \frac{c}{m}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$ y $F(t) = \frac{f(t)}{m}$, la ecuación diferencial se escribe

$$x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega^2 x(t) = F(t),$$

para resolver esta ecuación diferencial en la parte no homogénea se usa el método coeficientes indeterminados. Un caso importante es cuando $f(t)$ es una función periódica de la forma $f(t) = F_0\cos(wt)$, así debemos resolver la ecuación

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F_0 cos(wt),$$

buscamos una solución particular de la forma $x_p(t) = Asen(wt) + Bsen(wt)$ por coeficientes indeterminados se encuentra A y B,

$$A = \frac{wcF_0}{(k-w^2m)^2+w^2c^2}, \quad B = \frac{(k-w^2m)F_0}{(k-w^2m)^2+w^2c^2},$$

luego

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(k-w^2m)^2+w^2c^2}[wcsen(wt) + (k-w^2m)\cos(wt)]$$

que también puede escribirse (siendo la raíz $r = -a \pm bi$)

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k-w^2m)^2+w^2c^2}} cos(wt - \varphi),$$

de este modo la solución general es

$$x(t) = e^{-at}[c_1\cos(bt) + c_2 sen(bt)] + \frac{F_0}{\sqrt{(k-w^2m)^2+w^2c^2}} cos(wt - \varphi).$$

Se puede observar que cuando t es grande

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-at}[c_1\cos(bt) + c_2 sen(bt)] = 0,$$

por eso el primer término de $x(t)$ se denomina *término transitorio*. Así, para t grande la solución general tiende al segundo sumando que se denomina *término estacionario*.

Teorema 6.2. La forma normal de la ecuación

$$x''(t) + \frac{c}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0, \qquad (10)$$

está dado por la ecuación

$$z''(t) + w_0^2 z(t) = 0. \qquad (11)$$

Demostración. Suponiendo $x(t) = z(t)v(t)$ derivando y reemplazando en la ecuación (10) se obtiene

$$(zv'' + z''v + 2z'v') + \frac{c}{m}(zv' + z'v) + \frac{k}{m}zv = 0,$$

de donde

$$vz'' + \left(2v' + \frac{cv}{m}\right)z' + \left(v'' + \frac{c}{m}v' + \frac{k}{m}v\right)z = 0,$$

ahora es conveniente seleccionar v de tal modo que el coeficiente de z' sea cero. Es decir

$$2v' + \frac{c}{m}v = 0\,,$$

al ser separable la solución es $v(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}$, $v \neq 0$; en consecuencia la ecuación se reduce a

$$z''(t) + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2\right] z(t) = 0,$$

denotando por $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$, finalmente se obtiene

$$z''(t) + w_0^2 z(t) = 0\,. \blacksquare$$

Observación. La constante $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$ se denomina *frecuencia natural*.

Ejemplo 11. Un resorte vertical con constantes de 6 lb/ft tiene suspendida una masa de 0,5 slug. Se aplica una fuerza externa dada por $f(t) = 40\,sen(2t)$, $t \geq 0$. Supongamos que actúa una fuerza amortiguadora numéricamente igual dos veces la velocidad instantánea y que inicialmente el cuerpo está en reposo en su posición de equilibrio. Obtener la posición del cuerpo en cualquier tiempo t.

Solución. Con los datos de $k = 6\frac{lb}{ft}$, $m = \frac{1}{2}slug$, $c = 2$ y $f(t) = 40\,sen(2t)$, la ecuación diferencial de movimiento resultante es

$$\frac{1}{2}x''(t) + 2x'(t) + 6x(t) = 40sen(2t)\,,$$

es decir, la ecuación diferencial

$$x''(t) + 4x'(t) + 12x(t) = 80sen(2t)\,,$$

donde la solución complementaria de $x''(t) + 4x'(t) + 12x(t)$ es

$$x_h(t) = e^{-2t}\left(c_1\cos(2\sqrt{2}t) + c_2 sen\left(2\sqrt{2}t\right)\right).$$

Planteamos la solución particular $x_p(t) = Acos(2t) + Bsen(2t)$ que aplicando el método de coeficientes indeterminados se obtiene $A = -5$ y $B = 5$, entonces

$$x_p(t) = -5cos(2t) + 5sen(2t),$$

de manera que la solución se escribe

$$x(t) = e^{-2t}\left(c_1\cos(2\sqrt{2}t) + c_2 sen\left(2\sqrt{2}t\right)\right) - 5cos(2t) + 5sen(2t).$$

utilizando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ da $c_1 = 5$ y $x'(0) = 0$ resulta $c_2 = 0$. Por tan, la solución al problema de valor inicial

$$x(t) = 5e^{-2t}\cos(2\sqrt{2}t) - 5cos(2t) + 5sen(2t).$$

Se puede observar siendo la solución complementaria $x_h(t) = 5e^{-2t}\cos(2\sqrt{2}t)$ resulta que $\lim_{t\to+\infty} x_h(t) = 0$, esto confirma que $x_h(t)$ es un término transitorio o

una *solución transitoria*, es decir cuando t es bastante grande $\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_p(t)$; entonces $x_p(t)$ pasa a ser la solución *estacionaria o de estado permanente*, en la figura 6.15 se observa la línea interrumpida es la solución estacionaria y la línea continua es la solución completa. Con esta experiencia si ponemos en el problema como fuerza $F(t) = F_0 sen(wt)$ o $F(t) = F_0 cos(wt)$, siendo F_0 y w son constantes, entonces la solución general $x(t)$ consistirá en la suma de términos transitorio más término estacionario.

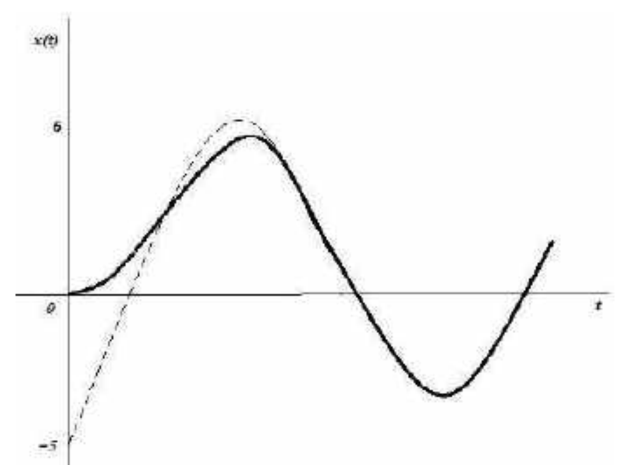


Figura 6.15: Ecuación de movimiento.

6.5 FENÓMENO DE RESONANCIA

Cuando la frecuencia de una fuerza externa periódica aplicada a un sistema mecánico está relacionada de una manera sencilla con la frecuencia natural del sistema, puede ocurrir el fenómeno de resonancia mecánica, la cual eleva las oscilaciones tales que el sistema puede desplomarse o colapsarse. Por ejemplo, un grupo de soldados marchando en fila través de un puente puede de esta forma hacer que el puente colapse; otro ejemplo, puede ser posible que una nota musical de una frecuencia característica propia estalle un cristal.

En la vida cotidiana, debido a los grandes daños que puede ocurrir, la resonancia mecánica es en general algo que necesita ser evitado, sobre todo al diseñar estructuras o mecanismos vibrantes. Nos centramos ahora en el caso en que hay una fuerza externa $f(t)$ que incluye en el movimiento de la masa, principalmente cuando dicha fuerza viene dada por una función armónica simple $f(t) = F_0 cos(wt)$.

Dada la ecuación diferencial

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F_0 cos(wt),$$

cuya solución es

$$x(t) = e^{-at}(c_1 \cos(bt) + c_2 sen(bt)) + \frac{F_0}{(k-w^2m)^2+w^2m^2} cos(wt - \varphi),$$

denotando por $G(w) = (k - w^2m)^2 + w^2m^2$, entonces es claro que la amplitud del término estacionario de $x(t)$ será máximo en el punto donde la función $G(w)$ alcance su mínimo. Hallamos el mínimo de $G(w)$, esto es

$$G'(w) = 2(k - w^2m)(-wm) + 2wc^2$$
$$= w(4m^2w^2 - 4mk + 2c^2) = 0\,,$$

de donde $w = 0$, $w^2 = \frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}$; así obtenemos que la máxima amplitud ocurre cuando

$$w^2 = \frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2} \approx w_0^2\,, w_0^2 = \frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}.$$

Al fenómeno en el cual la frecuencia de la fuerza externa se aproxima a la frecuencia natural del sistema se denomina *resonancia*, en este estado la amplitud de la oscilación es máxima; es decir cuando el coeficiente c es pequeño.

ANÁLISIS DE CASOS

Caso no amortiguado. Cuando $c = 0$, es decir, tratamos de analizar la ecuación

$$mx'' + kx = F_0 cos(wt),$$

conocemos la solución de la parte homogénea y es

$$x_h(t) = c_1 cos(w_0 t) + c_2 sen(w_0 t).$$

Para encontrar una solución particular debemos distinguir dos casos: con resonancia $w \neq w_0$, sin resonancia $w = w_0$.

Sin resonancia: $w \neq w_0$, en este caso podemos buscar una solución particular mediante el método de coeficientes indeterminados, es decir combinación lineal de las funciones $cos(wt)$ y $sen(wt)$. Haciendo cálculo vemos que esta solución es

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(w_0^2 - w^2)} \cos(wt),$$

se observa que esta solución es periódica y tiene la misma frecuencia que la fuerza F. Por tanto, la solución general es

$$x(t) = Acos(w_0 t - \varphi) + \frac{F_0}{m(w_0^2 - w^2)} \cos(wt)$$

y, viene a ser la suma de dos oscilaciones periódicas: una con la frecuencia natural w_0 y otra con la frecuencia de la fuerza externa w. Una pregunta que nos hacemos,

¿Es la solución periódica? En general no lo es. Pero se comprueba que la anterior función lo es si $\frac{w}{w_0}$ es racional.

En algunas aplicaciones, digamos en la teoría de control, una solución particular usada con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$, denotamos a tal solución $z(t)$, haciendo cálculos se obtiene

$$z(t) = \frac{F_0}{m(w_0^2 - w^2)}(\cos(wt) - \cos(w_0 t)) \,.$$

Ahora si queremos calcular la solución de la ecuación completa sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$, en esta caso basta sumar a la función $z(t)$ la solución de la ecuación homogénea que cumplen las mismas condiciones iniciales.

Veamos una forma de ver el uso de $z(t)$. Supongamos que $w \approx w_0$. Es decir, estamos próximos a que haiga resonancia, tenemos

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{F_0}{m(w_0^2 - w^2)}(\cos(wt) - \cos(w_0 t)), \\ &= \frac{F_0}{m(w_0^2 - w^2)} 2sen\left(\frac{1}{2}(w_0 - w)t\right) sen\left(\frac{1}{2}(w_0 + w)t\right), \end{aligned}$$

esto resulta habiendo usado una identidad trigonométrica.

En vista de que estamos muy cerca de la resonancia, la cantidad $w_0 + w$ resulta siendo grande comparado con $|w_0 - w|$. Esto se interpreta como que la función $sen\left(\frac{1}{2}(w_0 - w)t\right)$ oscila más lento que la función$sen\left(\frac{1}{2}(w_0 + w)t\right)$. Esto permite interpretar respecto de la solución anterior como una oscilación rápida con frecuencia angular $\frac{1}{2}(w_0 + w)$ y cuya amplitud varía lentamente $A(t) = \frac{2F_0}{m(w_0^2 - w^2)} sen\left(\frac{1}{2}(w_0 - w)t\right)$; luego la solución se escribe

$$z(t) = A(t) sen\left(\frac{1}{2}(w_0 + w)t\right).$$

Cabe destacar, que este tipo de oscilaciones donde hay una amplitud periódica que cambia lentamente se conoce como *pulsaciones*.

Resonancia pura, $\boldsymbol{w = w_0}$. Una solución de la ecuación diferencial

$$mx'' + kx = F_0 cos(w_0 t)$$

está dada por $x_p(t) = \frac{F_0}{2mw_0} tsen(w_0 t)$, de manera que la solución general es

$$x(t) = c_1 cos(w_0 t) + c_2 sen(w_0 t) + \frac{F_0}{2mw_0} tsen(w_0 t),$$

siendo c_1 y c_2 constantes arbitrarias. Cuando t es grande $x(t)$ crece, de modo que estas funciones son no acotadas.

Ejemplo 11. Si el problema contiene los datos $m = 1$, $F_0 = 2$ y $w_0 = 1$ entonces se puede observar en la gráfica de la solución particular que oscila entre las rectas de ecuaciones $x = \pm\frac{F_0}{2mw_0}t$, figura 6.16.

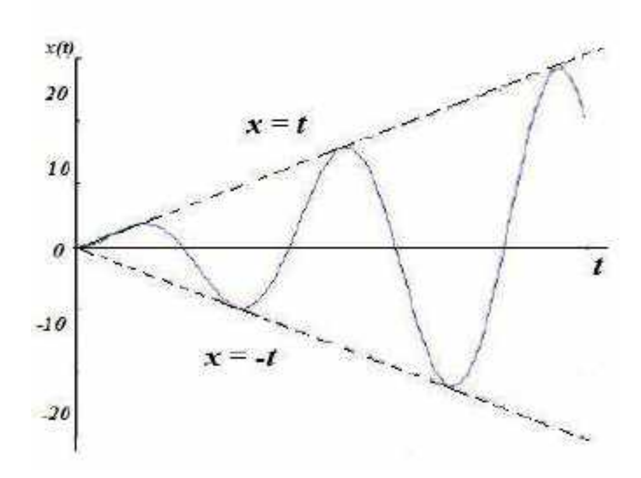


Figura 6.16: Resonancia pura**.**

Caso amortiguado: $c > 0$. Este ya es un caso más general, existe amortiguamiento, también hay fuerza externa. La ecuación homogénea asociada ya fue estudiada y se asocia con los casos de sobreamortiguamiento. En todos los caso se observa que si $x_h(t)$ es solución de la parte homogénea, entonces se cumple $\lim_{t\to+\infty} x_h(t) = 0$.

Con respecto de buscar solución de la ecuación completa, habrá que comenzar observando que cuando hay amortiguamiento no hay resonancia, esto se debe a que $F(t) = F_0cos(wt)$ nunca es solución de la ecuación homogénea $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$ cuando las constantes c y k son positivas.

Buscamos una solución particular de la ecuación completa $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F_0cos(wt)$, es conveniente usar el método de coeficientes indeterminado. Asumiendo una solución de la forma

$$x_p(t) = Acos(wt) + Bsen(wt),$$

derivando y reemplazando las indeterminadas A y B satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c}(k - mw^2)A + cwB = F_0 \\ -cwA + (k - mw^2)B = 0\end{array},$$

de donde

$$A = \frac{(k-mw^2)F_0}{(k-mw^2)^2+(cw)^2} \text{ y } B = \frac{cwF_0}{(k-mw^2)^2+(cw)^2}.$$

Por lo tanto la solución $x_p(t)$ se escribe

$$x_p(t) = \frac{\lambda F_0}{k}[\cos(wt)\, cos\varphi + sen(wt)sen\varphi]$$

$$= \frac{\lambda F_0}{k}\cos(wt-\varphi),$$

habiendo hecho sustituciones para hacerlo sencillo,

$$\lambda = \frac{k}{\sqrt{(k-mw^2)^2+(cw)^2}},$$

el ángulo φ sea tal que $cos\varphi = \frac{cw}{\sqrt{(k-mw^2)^2+(cw)^2}}$ y $sen\varphi = \frac{k-mw^2}{\sqrt{(k-mw^2)^2+(cw)^2}}$.

Naturalmente que la solución encontrada es $\frac{2\pi}{w}$ periódica. Luego la solución general es

$$x(t) = x_h(t) + \frac{\lambda F_0}{k}\cos(wt-\varphi).$$

Cabe observa que en esta solución, la función $x_h(t)$ se conoce como la solución transitoria y la solución particular $x_p(t)$ como permanente ya asintóticamente todas las soluciones tienen el mismo comportamiento.

Esta solución particular la denotaremos en adelante $x_{rp}(t) = \frac{\lambda F_0}{k} cos(wt-\varphi)$. Cuando $w = 0$, la solución es la función constante $x_{rp}(t) = \frac{F_0}{k}$. El número $\lambda = \lambda(w)$ se llama *factor de amplificación* ya que indica la cantidad que varía la amplitud con respecto a la solución cuando w es cero, pasando de ser $\frac{F_0}{k}$ (conocido como *desplazamiento estático o ganancia*) a $\lambda(w)\frac{F_0}{k}$.

¿Cómo será la dependencia del factor de amplificación λ con respecto a la frecuencia externa w? Observemos que si $w = 0$ se tiene que $\lambda = 1$ y que $\lim_{w\to+\infty} \lambda(w) = 0$. Para analizar el comportamiento de la función $\lambda(w)$ en el intervalo $\langle 0,+\infty\rangle$ es apropiado recurrir a la función $h(w) = (k-mw^2)^2 + (cw)^2$. Haciendo cálculos de derivadas se muestra que esta función es creciente en $\langle 0,+\infty\rangle$ si $c \geq \sqrt{2km}$ y tiene un mínimo global en el valor $w_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}}$ si $c < \sqrt{2km}$. Por lo tanto, la función $\lambda(w)$ es decreciente si $c \geq \sqrt{2km}$ y tiene un máximo global en el punto w_1 si $c < \sqrt{2km}$. el valor w_1 se conoce como *resonancia práctica*. Es decir, la amplificación de la solución permanente es máxima para el valor w_1 si $c < \sqrt{2km}$. Puede verificarse que en este último caso $\lambda(w_1) = \frac{2km}{c\sqrt{4km-c^2}}$,

lo que señala para determinados valores de los parámetros iniciales k, c y m el valor de la amplitud puede ser relativamente grande.

Ejemplo 13. Considere una masa de 10 kg que está unida a una pared una distancia de 0,02 m. y se suelta a partir del reposo, determinar la posición y la velocidad de la masa en el tiempo, la frecuencia de oscilación, la amplitud, el ángulo de fase y las energías cinética y potencial en el tiempo t. El problema que modela esta situación es:

$$10x'' + 10x = 0; \;\; x(0) = 0{,}02; x'(0) = 0.$$

Solución. La solución general está dada por

$$x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 sen(t),$$

y la solución al problema de valor inicial es

$$x(t) = 0{,}02 \cos(t) = 0{,}02 sen\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Tenemos $w = 1\, rad/s$, $T = 2\pi$ seg; $A = 0{,}002\, m$; la frecuencia de oscilación está dado por $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\, osc/s$; el ángulo de fase $\varphi = \frac{\pi}{2}$; la energía cinética $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 0{,}002 sen^2(t)$; la energía potencial es $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0{,}002 cos^2(t)$.

Ejemplo 14. Un resorte cuelga verticalmente de un techo, el resorte sufre una deformación en su longitud de un centímetro cuando se coloca una masa de 1,5 kg y después el sistema queda en equilibrio. Posteriormente se elonga una cantidad de 1,5 cm. y se suelta a partir del reposo. Determine la constante del resorte, la posición y la velocidad de la masa en el tiempo t (positivo). ¿Cuál es la frecuencia de oscilaciones de la masa y la amplitud del movimiento?

Nota: En la posición de equilibrio, la constante del resorte es: $k = \frac{mg}{\Delta t}$. Considerando como origen de coordenadas a la posición de equilibrio y la dirección positiva del eje vertical hacia abajo, entonces, la posición de la masa viene dada por la solución del problema de valor inicial

$$mx'' + kx = 0; x(0) = x_0; x'(0) = v_0.$$

Solución. La solución al problema de valor inicial es

$$x(t) = 0{,}015 cos\left(\sqrt{980}t\right),$$

y la velocidad $v(t) = 0{,}015\sqrt{980}\, sen\left(\sqrt{980}t\right)$, también $w = \sqrt{980} rad/s$, $f = \frac{\sqrt{980}}{2\pi} \approx 4{,}98$ oscilaciones en un segundo; la amplitud $A = 0{,}015\, m$.

Ejemplo 15. Un peso de 4 lb se suspende de un resorte cuya constante es de $k = 8\frac{lb}{ft}$. Asumiendo que una fuerza externa dada por $f(t) = 4\cos(8t)$ se aplica al resorte y que no hay amortiguamiento. Obtener el movimiento, suponiendo que

inicialmente el peso está en la posición de equilibrio y que su velocidad inicial es cero.

Solución. La ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{4}{32}x''(t) = -8x(t) + 4\cos(8t),$$

o bien

$$x''(t) + 64x(t) = 32\cos(8t),$$

la solución de $x''(t) + 64x(t) = 0$ está dado por

$$x_c(t) = c_1\cos(8t) + c_2 sen(8t),$$

para la solución particular proponemos $x_p(t) = Atcos(8t) + Btsen(8t)$ que reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene $A = 0$ y $B = 2$, de esta forma la solución general se escribe

$$x(t) = c_1\cos(8t) + c_2 sen(8t) + 2tsen(8t).$$

Pero además cumple las condiciones iniciales, para $x(0) = 0$ resulta $c_1 = 0$, si $x'(0) = 0$ se obtiene $c_2 = 0$. Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = 2tsen(8t).\ \blacksquare$$

Se observa que en este caso hay resonancia pura en vista de que $c = 0$ y la frecuencia de la fuerza externa aplicada es igual a la frecuencia natural del sistema no amortiguado. Su gráfica, se muestra en la figura 2.17, oscila entre las rectas $x = \pm\frac{F_0}{2mw_0}t$, siendo $F_0 = 4$, $m = \frac{1}{8}$, $w_0 = 8$, es decir las rectas $x = \pm 2t$.

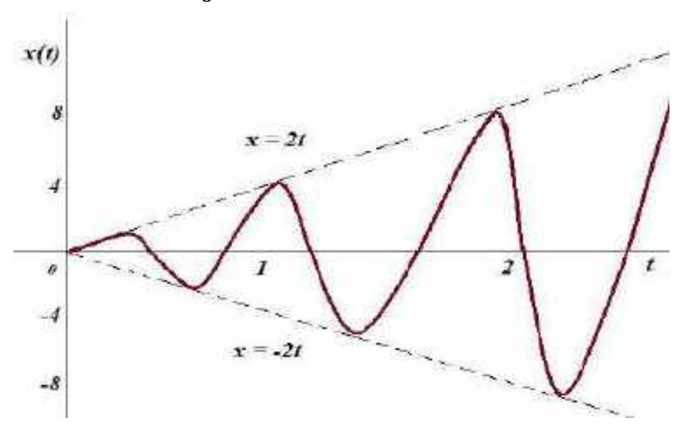


Figura 2.17: Resonancia pura.

Se puede observar en el gráfico que las oscilaciones van creciendo sin límite, naturalmente el resorte está limitado a romperse dentro de un corto tiempo. Un principio general para que ocurra resonancia es que se ignore el amortiguamiento, frecuencia de la fuerza externa aplicado fue igual a la frecuencia

natural del sistema amortiguado. En el caso donde ocurre amortiguamiento las oscilaciones no crecen sin límite; pero sin embargo puede llegar a ser muy grandes, la resonancia en este caso ocurre cuando la frecuencia de la fuerza externa aplicado es ligeramente menor que la frecuencia natural del sistema.

6.6 SOLUCIONES PERIODICAS

Dada la ecuación diferencial

$$z''(t) + w_0^2 z(t) = f(t)\,, \qquad (13)$$

donde $f(t)$ es una función periódica, es natural preguntarse por las soluciones periódicas de (13). Supongamos que $f(t)$ es 2π periódica, continua y que se puede desarrollar por la serie de Fourier. Así,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kt) + b_k sen(kt)]\,,$$

Por otro, lado si existe una solución periódica, entonces será de la forma

$$z(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \cos(kt) + B_k sen(kt)],$$

de modo que reemplazando $z(t)$ en (13) se obtiene

$$-\sum_{k=1}^{\infty} k^2\big(A_k \cos(kt) + B_k sen(kt)\big) + w_0^2\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \cos(kt) + B_k sen(kt)]\right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kt) + b_k sen(kt)],$$

de donde resulta

$$\frac{w_0^2 A_0}{2} + (w_0^2 - k^2)\sum_{k=1}^{\infty}[A_k \cos(kt) + B_k sen(kt)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kt) + b_k sen(kt)]$$

Se tienen

(i) Cuando $w_0 \notin Z$ se obtiene

$$A_0 = \frac{a_0}{w_0^2}\,, A_k = \frac{a_k}{w_0^2 - k^2}\,,\; B_k = \frac{b_k}{w_0^2 - k^2}\,,$$

es decir, la solución periódica viene dado por

$$z(t) = \frac{a_0}{2w_0^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k}{w_0^2 - k^2}\cos(kt) + \frac{b_k}{w_0^2 - k^2} sen(kt)\right],$$

entonces como $f(t)$ es continua y su representación en serie de Fourier converge uniformemente, por tanto, la representación en serie de $z(t)$ es convergente.

(ii) Si $w_0 \neq n$ pero $|w_0 - n| < \varepsilon$. En este caso los coeficientes

$$A_n = \frac{a_n}{w_0^2 - n^2}\,, B_n = \frac{b_n}{w_0^2 - n^2}$$

crecen bruscamente; es decir, estamos en presencia del fenómeno de resonancia.

(iii) Si $w_0 = n$, pero $a_n = b_n = 0$, entonces existe solución periódica $z(t)$, donde los coeficientes A_k y B_k son dados por la fórmula de arriba para $k \neq n$, mientras que A_n, B_n son constantes arbitrarias en vista de que $A_n \cos(nt) + B_n sen(nt)$ es solución de la ecuación homogénea correspondiente.

(iv) Si $w_0 = n$, pero a_n o b_n no es cero, entonces resolviendo la ecuación (13) con segundo miembro el sumando resonante $a_n \cos(nt) + b_n sen(nt)$ se obtiene

$$z''(t) + n^2 z(t) = a_n \cos(nt) + b_n sen(nt),$$

cuya solución particular es

$$z_p(t) = t[A_n \cos(nt) + B_n sen(nt)],$$

que naturalmente es un término no periódico de la solución $z(t)$; por tanto, no existen soluciones periódicas.

Ejemplo 16. Halle la solución periódica de la ecuación diferencial

$$z''(t) + z(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(kt)}{k^2}.$$

Solución. En este caso $w_0^2 = 1$; es decir, $w_0 = 1$ y como el segundo miembro no contiene términos resonantes, por lo tanto existe solución periódica y es

$$z_c(t) = c_1 \cos(t) + c_2 sen(t),$$

$$z_p(t) = \sum_{k=2}^{\infty}(A_K \cos(kt) + B_k sen(kt)), B_k = 0, A_k = \frac{1}{k^2(1-k^2)}$$

$$z_p(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2(1-k^2)} \cos(kt),$$

por tanto,

$$z(t) = c_1 \cos(t) + c_2 sen(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2(1-k^2)} \cos(kt). \blacksquare$$

Ejemplo 17. Obtener la solución periódica de la ecuación

$$z''(t) + 4z(t) = sen^2(t).$$

Solución. Tenemos a $w_0 = 2$ y al ser $sen^2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$, el coeficiente del sumando de resonancia $-\frac{1}{2}\cos(2t)$ es distinto de cero, luego por (iv), no existe solución periódica.

PROBLEMA 6.3

1. Un peso de 32 lb se sujeta a un resorte de constante de elasticidad igual a $5\frac{lb}{ft}$. El peso y el resorte se sumergen en un medio que ofrece una resistencia

numéricamente igual a 6 veces la velocidad instantánea. el movimiento se inicia en un punto que se encuentra 4 pulgadas debajo de la posición de equilibrio y partiendo del reposo. A) obtener la ecuación de movimiento si sobre el peso se aplica una fuerza externa igual a $f(t) = e^{-t}$; b) determine la gráfica de la ecuación de movimiento.

2. Una masa de 1 slug se encuentra suspendida de un resorte constante de elasticidad igual a $4\frac{lb}{ft}$ y el sistema está inmerso en un medio que se opone una fuerza de resistencia numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea. si la masa se suelta 6 pulgadas arriba de la posición de equilibrio con un velocidad dirigida hacia debajo de $4\frac{ft}{s}$. a) escribir la ecuación de movimiento, si actúa una fuerza externa sobre la masa dada por $f(t) = 10sen(2t) + 20\cos(2t)$; b) obtener las gráficas de la solución transitoria y de la solución estacionaria utilizando el mismo sistema de ejes coordenados; c) mostrar la gráfica de la ecuación del movimiento.
3. Un resorte tiene una constante de elasticidad igual a $1\frac{lb}{ft}$. Un peso de 8 lb se suspende de un extremo del resorte y el sistema se coloca en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea; si el peso se suelta en reposo, 4 pulgadas sobre la posición de equilibrio y sobre él actúa una fuerza externa $f(t) = 25sen(4t)$. A) obtener la ecuación de movimiento; b) trazar su gráfica.
4. Resuelve el problema 2 en ausencia de la fuerza de resistencia.
5. Un resorte sujeto a un soporte tiene suspendida una masa de 2 kg y la constante de elasticidad del resorte es de $4\frac{N}{m}$. El sistema está en reposo cuando el soporte empieza a oscilar de acuerdo a la expresión $f(t) = 2\cos(3t)$. A) obtener la ecuación diferencial del movimiento si el sistema completo está inmerso en un medio que opone una fuerza de resistencia numéricamente igual a 6 veces la velocidad instantánea, b) hallar la ecuación de movimiento, considere que el peso está en reposo en la posición de equilibrio cuando el soporte comienza a oscilar; c) Mostrar la gráfica de la ecuación de movimiento.
6. Resuelve el ejercicio 5 en ausencia de amortiguamiento.

6.7 MOVIMIENTO DE UN PÉNDULO SIMPLE

El interés por el péndulo sigue latente en el mundo académico. Existen observaciones que realizar sobre varios aspectos, el período de un péndulo no es propiamente independiente de la amplitud inicial de la oscilación, significa que un péndulo no podría ser utilizado para la construcción de relojes de precisión. Este hecho motivó el problema de encontrar una curva sobre la cual las oscilaciones debidas a la acción de la gravedad fueran independientes de la posición inicial. Precisamente la curva es la cicloide, fue Christiann Huygens (1629-1695) quién logró demostrarlo.

El estudio del péndulo estaba ligado a dos problemas importantes de la época: la forma de la tierra y la justificación de la ley del cuadrado de las inversas de la atracción gravitatoria. Vamos a analizar ahora al detalle la ecuación del péndulo.

Un péndulo simple consiste en una partícula de masa m suspendida de una cuerda (o un elástico) de largo l y de masa despreciable. Supongamos que la cuerda está siempre tensa, que las oscilaciones en el plano vertical y que las únicas fuerzas que actúan son el peso de la partícula y la función de la cuerda, se quiere hallar la ecuación del movimiento.

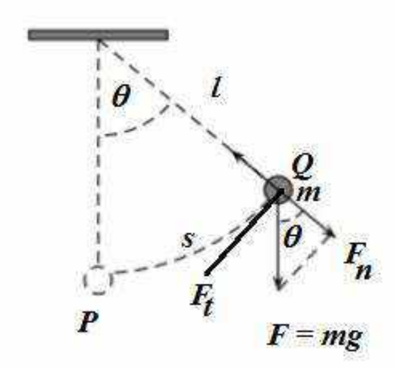


Figura 6.18: Fuerzas que actúan sobre el péndulo.

Descomponiendo el peso mg en dos componentes, uno en la dirección de la tangente a la trayectoria, esto es la fuerza tangente $F_t = mgsen(\theta)$, y la otra perpendicular a esta, la fuerza normal $F_n = mgcos(\theta)$, vemos que la componente perpendicular se compensa por la tensión; la aceleración es $a = mg$, figura 6.18

Vamos a expresar la posición del péndulo en cada instante t por la función $\theta(t)$ que modela el desplazamiento angular de masa con respecto a su posición de

equilibrio. Resulta que, al moverse el péndulo, la masa describe arcos de circunferencia de radio l, y al moverse del ángulo de θ_1 hasta θ_2, la masa habrá recorrido la distancia $l(\theta_2 - \theta_1)$. De manera que el espacio recorrido por la masa entre el tiempo t_1 a t_2 es $l\big(\theta(t_2) - \theta(t_1)\big)$, donde la velocidad instantánea es $l\theta'(t)$ y la aceleración instantánea es $l\theta''(t)$.

Se observa que, la única fuerza que actúa en el movimiento del péndulo es la componente tangencial $-mgsen(\theta)$; la componente normal se anula por la acción y reacción. Suponiendo ausencia de rozamiento y conforme al balance de fuerzas dado por la segunda ley de Newton, se tiene

$$ma = -mgsen(\theta(t)),$$

siendo $s = \widehat{PQ}$ y como $s = l\theta$ se obtiene

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

luego

$$ml\theta''(t) = -mgsen(\theta(t))$$

lo que es equivalente a

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}sen\big(\theta(t)\big) = 0$$

lo cual es una ecuación diferencial de segundo orden y no lineal.

ANÁLISIS DEL PÉNDULO NO LINEALIZADO

Veamos cómo se comporta el péndulo cuando la masa se suelta desde el reposo a un cierto ángulo $\theta_0 \in \langle 0, \pi \rangle$, es decir se está imponiendo las condiciones iniciales del movimiento por $\theta(0) = \theta_0$ y $\theta'(0) = 0$. Entonces, multiplicando $\theta'(t)$ la ecuación diferencial

$$\theta''(t)\theta'(t) + \frac{g}{l}sen(\theta(t))\theta'(t) = 0\,,$$

es decir

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\theta'(t))^2\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{g}{l}cos\big(\theta(t)\big)\right] = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 - \frac{g}{l}cos\big(\theta(t)\big)\right] = 0\,,$$

quiere decir

$$\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 - \frac{g}{l}cos\big(\theta(t)\big) = c$$

es constante. Por tanto, la cantidad $\frac{1}{2}(l\theta'(t))^2 - glcos\big(\theta(t)\big)$ se conserva a lo largo del movimiento, su verdad tiene que ver con la ley de conservación de la energía,

se sabe que la energía total, la energía cinética más energía potencial, está dada por

$$E = \frac{1}{2}(l\theta'(t))^2 - glcos\big(\theta(t)\big)\,.$$

Por otro lado, tenemos que dada la posición inicial del péndulo en θ_0 y asumiendo que la masa se deja caer en reposo, $\theta(0) = \theta_0$ y $\theta'(0) = 0$, en

$$\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 - \frac{g}{l}cos\big(\theta(t)\big) = c\,,$$

se obtiene $c = -\frac{g}{l}cos(\theta_0)$, es decir para todo tiempo t se expresa

$$\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 - \frac{g}{l}\Big(cos\big(\theta(t)\big)\Big) = -\frac{g}{l}cos(\theta_0),$$

o bien

$$\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 = \frac{g}{l}\Big(cos\big(\theta(t)\big) - cos(\theta_0)\Big) \tag{15}$$

Se observa que, en vista $\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 \geq 0$, se tiene que $\cos(\theta(t)) \geq cos(\theta_0)$, significa que siempre existe $\theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0]$. Cuando se tiene un péndulo, una característica importante es su período de oscilación, esto es el tiempo que tarda en ir desde θ_0 hasta $-\theta_0$ y volver de nuevo a θ_0; aquí $T(\theta_0)$ es el período de oscilación.

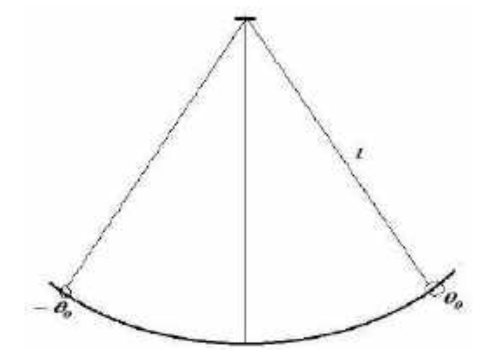


Figura 2.19: Recorrido del péndulo**.**

Por otro lado, cuando el péndulo va desde θ_0 hasta $-\theta_0$ se tiene $\theta'(t) < 0$. A partir de la ecuación (15) se observa

$$\theta'(t) = -\sqrt{\frac{2g}{l}\Big(cos\big(\theta(t)\big) - cos(\theta_0)\Big)}$$

es una ecuación de variable separable, luego integrando

$$-\int_{\theta_0}^{-\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} = \int_0^{t_1} dt = t_1$$

al ser t_1 el tiempo que tarde en ir desde θ_0 hasta $-\theta_0$. Por tanto, siendo $T(\theta_0)$ el período de oscilación (por simetría este tiempo es doble), el período está dado por

$$T(\theta_0) = 2t_1 = 2\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{2g}{l}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - cos(\theta_0)}}$$

haciendo cambio de variable $k = sen\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$, $sen(\varphi) = \frac{1}{k} sen\left(\frac{\theta}{2}\right)$ el valor $T(\theta_0)$ es

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - sen^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)sen^2(\varphi)}},$$

lo cual se conoce como la *integral elíptica de primera especie*. La gráfica es como la figura 6.20, dado que $T(\theta_0)$ depende de θ_0, si la oscilación es pequeña $(\theta_0 \to 0)$ entonces $T(\theta_0) \to 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, de esta forma el período de oscilación es aproximadamente $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; en conclusión aquí el período de oscilación es variable.

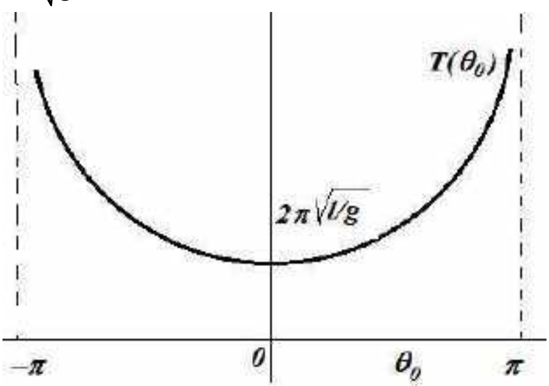


Figura 6.20: período del péndulo en función del ángulo inicial.

PÉNDULO LINEALIZADO

Si consideramos una vecindad del origen entonces $\theta(t)$ coincide con $sen(\theta(t))$; es decir, un amplitud de oscilación θ_0 pequeña muy cerca de cero, entonces $sen(\theta) \approx \theta$, si es así, la ecuación diferencial se transforma

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0 \qquad (16)$$

y es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Esto es importante, veremos a diferencia del anterior, las oscilaciones del péndulo linealizado si tiene un periodo constante. De manera similar, multiplicando (16) por $\theta'(t)$ se tiene

$$\theta''(t)\theta'(t) + \frac{g}{l}\theta(t)\theta'(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 + \frac{g}{2l}(\theta(t))^2\right],$$

$$\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 + \frac{g}{2l}(\theta(t))^2 = c$$

con c constante, vemos que la cantidad $V = \frac{1}{2}(\theta'(t))^2 + \frac{g}{2l}(\theta(t))^2$ se conserva y aplicando $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$, se obtiene

$$\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 + \frac{g}{2l}(\theta(t))^2 = \frac{g}{2l}\theta_0^2,$$

el periodo se expresa en este caso por

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}$$

haciendo $x = \frac{\theta}{\theta_0}$ se obtiene la integral,

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{1}\frac{\theta_0 dx}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta_0^2 x^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

y, se observa que es independiente del ángulo inicial, sólo depende de la longitud del péndulo.

La solución general del movimiento armónico simple es

$$\theta(t) = c_1 cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_2 sen\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right),$$

la constante c_1 y c_2 se determinan con las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$ y $\theta'(0) = 0$, entonces la solución queda

$$\theta(t) = \theta_0 cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

otra forma de presentar la solución es

$$\theta(t) = Acos(wt - \varphi)$$

donde A es la amplitud de la oscilación, φ la fase fundamental, $T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Ejemplo 18. Un péndulo de masa $M = 2\ kg$ y de longitud 2,45 m está suspendido sobre un marco horizontal. El péndulo se levanta un ángulo de 10º y se suelta con una velocidad angular de $-0,4\ rad/s$, se pide: a) ¿cuántos ciclos (oscilaciones)

completos habrá completado el péndulo después de 10 s?; b) ¿en qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio con velocidad angular positiva por tercera vez?; c) ¿En qué instantes la masa alcanza sus desplazamientos extremos? d) ¿Cuál es la posición de la masa del péndulo en cualquier tiempo? e) ¿Cuál es la posición de la masa a los 10 segundo?

Solución. La ecuación diferencial del movimiento es

$$\theta'' + \frac{g}{l} sen\theta = 0,$$

pero como se asume ángulos muy pequeños, infinitésimo, de manera que $sen\theta \approx \theta$, así la ecuación diferencial queda

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

siendo $g = 9.8$; la longitud $l = 2{,}45$ con estos datos la ecuación queda $\theta'' + \frac{9.80}{2{,}45}\theta = 0$; es decir $\theta'' + 4\theta = 0$, cuya solución general se expresa

$$\theta(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 sen(2t)$$

y la solución al problema de valor inicial $\theta(0) = \frac{\pi}{18}$ rad ; $\theta'(0) = -0{,}4\, rad/s$ es la posición de masa en cualquier tiempo

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18}\cos(2t) - \frac{1}{5} sen(2t) = Asen(wt + \varphi)$$

La forma alternativa de la solución

$$\theta(t) = 0{,}2654 sen(2t + 2{,}4242)$$

donde la amplitud es

$$A = \sqrt{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2},$$

y, $tan\varphi = \frac{\pi/18}{-0{,}2}$, $\varphi = 2{,}4242$; $w = 2$; el período $T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ segundos; luego en 10 segundos se realizan $\frac{10}{3} \approx 3$ oscilaciones (o ciclos) completas. La velocidad angular es

$$\theta'(t) = 0{,}5308 \cos(2t + 2{,}4242)\, rad/s.$$

La masa pasa por la posición de equilibrio cuando $\theta(t) = 0$, es decir,

$$\theta(t) = 0{,}2654 sen(2t + 2{,}4242) = 0$$

de donde resulta

$$2t + 2{,}42420 = n\pi;\ n = 1,2,3,4, \dots$$

$$t = \frac{n\pi - 2{,}4242}{2}, n = 1,2,3,4, \dots$$

por otro lado, la velocidad angular

$$\theta'(t) = 0{,}5308cos(2t + 2{,}4242)$$

para valores impares de n, está dado por $\theta'(t) = -0{,}5308\ rad/s$ para $(n = 1)$ de manera que la tercera vez que se cruza la posición de equilibrio con velocidad angular negativa ocurre cuando $n = 5$ es decir cuando $t \approx 6{,}6419$ segundos, la gráfica de $\theta(t)$ es la figura 6.21.

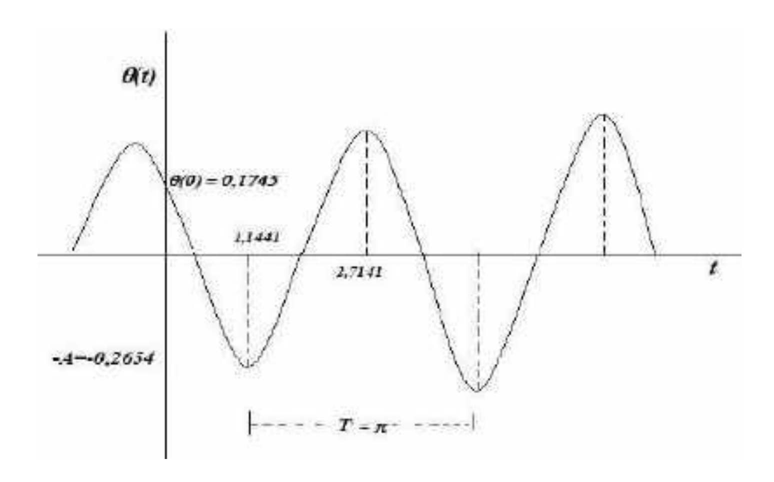


Figura 6.21: Solución $\theta(t)$.

Por otro lado, el péndulo obtiene sus valores extremos 0 de retorno cuando la velocidad angular es cero. Es decir cuando $\theta'(t) = 0$, es decir

$$cos(2t + 2{,}4242) = 0$$

$$2t + 2{,}4242 = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ \ n = 1{,}2{,}3{,}4{,}5$$

$$t_n = \frac{(2n+1)}{4}\pi\ ,$$

es decir $1{,}1441\ s$, $2{,}7149\ s$, $4{,}2857\ s$,… y así sucesivamente. Finalmente, la posición de la masa 10 segundos es

$$\theta(10) = 0{,}2654sen(20 + 0{,}4242) = -0{,}1114\ rad.\ ■$$

PROBLEMAS 6.4

1. Un péndulo de 20 cm de longitud y de masa 0,5 kg oscila. Si en tiempo $t = 0$, el ángulo es $\frac{\pi}{12} rad$ y la velocidad angular en $t = 0$ es $\frac{7\pi}{12} rad/s$. determine el periodo de movimiento, la amplitud, el ángulo de fase, ecuación de movimiento, la velocidad angular, el tiempo para $\theta = 0\ rad$.

R. $\theta(t)=\frac{\pi}{6\sqrt{2}}sen\left(7t+\frac{\pi}{4}\right)rad;\ \theta'(t)=\frac{7\pi}{6\sqrt{2}}cos\left(7t+\frac{\pi}{4}\right)rad/s,\ A=\frac{\pi}{6\sqrt{2}}\ ;\ \varphi=\frac{\pi}{4}\ ;\ T=\frac{2\pi}{7}\ s$.

2. Obtener el ángulo, la velocidad angular en el tiempo de un péndulo de longitud 0,098 m, con masa 0,5 kg, sujeta a las condiciones $\theta(0)=0\ rad$ y $\theta'(0)=0{,}02\ rad/s$.
   R. $\theta(t)=0{,}002sen(10t)rad\ ;\ \theta'(t)=0{,}02cos(10t)rad/s$.
3. Un péndulo de $\frac{1}{5}$ metros de longitud se suelta con una velocidad de $\frac{1}{2}\ radian/s$ desde un extremo situado a $\frac{1}{10}$ radian respecto de la vertical hacia dicha vertical. Obtener la ecuación del movimiento.
   R. $\theta(t)=\frac{1}{10}\cos(7t)+\frac{1}{14}sen(7t)$.
4. Encontrar la ecuación de movimiento y la velocidad angular en el tiempo de un péndulo de longitud 9,8 m, con masa 2,5 kg, bajo las condiciones $\theta(0)=0{,}1\ rad$ y $\theta'(0)=-0{,}01\ rad/s$.
   R. $\theta(t)=\frac{1}{5\sqrt{2}}sen\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)rad;\ \theta'(t)=\frac{1}{5\sqrt{2}}cos\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)rad/s$.

6.8 OSCILACIONES DE UNA BOYA CILÍNDRICA EN EL AGUA

Podemos afirmar que no es exactamente un problema masa-resorte, pero su análisis es similar. Una boya es una baliza flotante, puede situarse en un lago, mar o un río, generalmente anclada al fondo, puede ser de corcho o cuerpo ligero. Los pescadores suelen ponerlos en el borde de una red para que no se hunda, de esta manera los pescadores pueden saber cuándo vuelven a recogerla; es muy importante por su uso como señales flotantes.

Tenemos una boya de forma cilíndrica flotando, al dejar caer un objeto sobre la boya (digamos una persona que salta encima), entonces la boya empieza a oscilar. Determinar el período de oscilación y la ecuación del movimiento armónico simple.

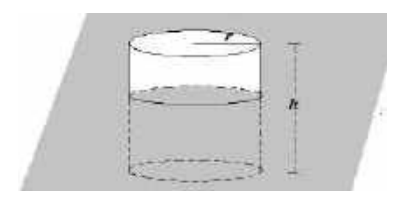


Figura 6.22: Boya cilíndrica de altura *h* y radio *r*.

Veamos los fundamentos físicos, asumiendo una boya cilíndrica de densidad ρ_b menor que la del agua, radio r y altura h, figura 6.22. En el equilibrio, la boya estará sumergida una altura h, dada por el principio de Arquímedes: $peso = empuje$. La boya está en equilibrio cuando la fuerza de flotación es igual al peso de la boya; donde el volumen de la boya es $V = \pi r^2 h$ y su peso está dado por

$$w_b = m_b g = \rho_b V g = \rho_b \pi r^2 h g \qquad \text{(a)}$$

donde, peso de la boya w_b; masa de boya m_b; gravedad g; densidad de la boya ρ_b; volumen de la boya V.

Ahora se asume que la boya está en equilibrio cuando está sumergida una altura h_1. En vista de que la fuerza de flotación F_{flot}, es igual al peso del líquido desplazado, se tiene

$$F_{flot} = m_a g = \rho_a V_1 g = \rho_a \pi r^2 h_1 g \qquad \text{(b)}$$

donde, la masa del agua m_a; densidad del agua ρ_a; volumen desplazado $V_1 = \pi r^2 h_1$. Igualando (a) y (b) se obtienen

$$w_b = F_{flot}\,,$$

$$\rho_a \pi r^2 h_1 g = \rho_b \pi r^2 h g\,,$$

de donde obtenemos la altura h_1 que se sumerge la boya cuando se encuentra en equilibrio

$$h_1 = \frac{\rho_b h}{\rho_a} \text{ o bien } h_1\rho_a - h\rho_b = 0.$$

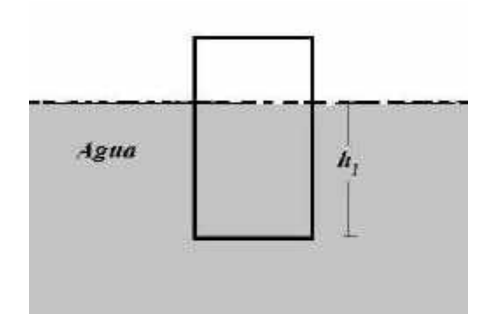


Figura 6.23: boya sumergida a una altura h_1.

Seguidamente, sobre la distancia h_1, sumergimos la boya una altura adicional x_0 y la soltamos con la velocidad $v_0 = 0$. En este caso, la fuerza de flotación ya no es igual al peso, el sistema deja de estar en equilibrio y empieza a oscilar; incluso podemos hallar el periodo de oscilación. En cualquier momento la posición de equilibrio se encuentra a una distancia x con respecto al agua, figura 6.24.

Tenemos que calcular la fuerza neta que actúa cuando la boya se ha desplazado x de la posición de equilibrio. Si el desplazamiento x es hacia arriba, la resultante es hacia abajo. La fuerza es de signo contrario al desplazamiento, como vemos en la figura 6.24; x es negativa cuando la posición de equilibrio de la boya está sumergida una distancia x; mientras que x es positiva cuando la posición de equilibrio se encuentra a una distancia x arriba del agua.

Ahora, la fuerza que actúa sobre la boya en cualquier momento es

$$F = F_{flot} - m_b g = \rho_a \pi r^2 (h_1 - x) g - \rho_b \pi r^2 h g \,,$$

$$F = \rho_a \pi r^2 h_1 g - \rho_a \pi r^2 x g - \rho_b \pi r^2 h g \,,$$

$$F = -\rho_a \pi r^2 x g + [\rho_a h_1 - \rho_b h] \pi r^2 g$$

al ser $\rho_a h_1 - \rho_b h = 0$ se tiene

$$F = -\rho_a \pi r^2 x g \,.$$

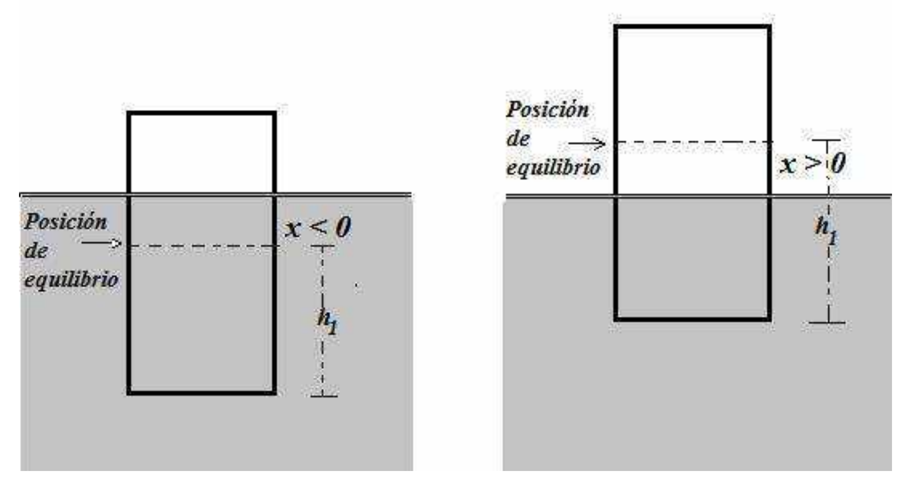


Figura 6.24: boya sumergida con desplazamiento x**.**

Por otro lado, de acuerdo con la segunda Ley de Newton, $F = ma$, con aceleración a, el movimiento de la boya a partir de la posición de equilibrio es

$$m_b \frac{d^2x}{dt^2} = -\rho_a \pi r^2 x g,$$

$$\rho_b \pi r^2 h \frac{d^2x}{dt^2} = -\rho_a \pi r^2 x g,$$

es decir

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \left(\frac{\rho_a g}{\rho_b h}\right) x(t) = 0 \,,$$

que una ecuación diferencial de segundo orden del tipo masa-oscilador, donde la frecuencia natural es

$$w=\sqrt{\frac{\rho_a g}{\rho_b h}}.$$

La solución general de la ecuación diferencial está dada por

$$x(t)=c_1\cos(wt)+c_2 sen(wt).$$

Finalmente si aplicamos las condiciones iniciales $x(0)=-x_0$ resulta $c_1=-x_0$; y si $x'(0)=0$ se obtiene $c_2=0$, luego la solución al valor inicial es

$$x(t)=-x_0\cos(wt).$$

Ejemplo 19. Se tiene una boya cilíndrica de radio 0,5 m, altura 1 m; densidad 500 kg/m^3 se encuentra flotando en la superficie de un lago. Inicialmente se encuentra en equilibrio, de pronto se sumerge una distancia x_0 y se suelta con velocidad igual a cero. Obtener la ecuación diferencial y la solución del modelo, determine la posición y la velocidad de la boya en cualquier tiempo, si se sumerge una profundidad de 0,01 m a partir de la posición de equilibrio.

Solución. Tenemos los datos: altura $h=1\,m$; radio de la boya $r=0{,}5\,m$; densidad de la boya $\rho_b=500\,kg/m^3$, se sumerge $x_0=0{,}01\,m$ a parir de la posición de equilibrio; gravedad $g=9{,}8\,m/s^2$, y que la densidad del agua es $\rho_a=1000\,kg/m^3$.

La frecuencia natural es

$$w=w=\sqrt{\frac{\rho_a g}{\rho_b h}}=\sqrt{\frac{(1000)(9{,}8)}{(500)(1)}}=4{,}4272\,,$$

siendo la amplitud $x_0=-0{,}01\,m$ debido a que se sumerge. Por tanto, la posición de la boya según las condiciones iniciales es

$$x(t)=-0{,}01cos(4{,}4272t)\,m\,.$$

mientras que la velocidad resulta

$$v(t)=x'(t)=0{,}0443sen(4{,}4272t)\,m/s\,.\ \blacksquare$$

Ejemplo 20. Un cilindro circular recto de 6 metros de diámetro está verticalmente sumergido en el agua cuya densidad es 1000 kg/m^3. Si se empuja hacia abajo y se suelta tiene un periodo de vibración de 1 segundo. Obtener el peso del cilindro.

Solución. Sea positiva la dirección hacia abajo. También sea x metros el movimiento del cilindro en el tiempo t. Según el principio de Arquímedes: "*Todo cuerpo sumergido, total o parcialmente, en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del fluido desalojado*". Luego la variación que corresponde a la fuerza de flotación es $1000\pi(3)^2x$ con radio 3 metros. En consecuencia, por la ley del movimiento vibratorio,

$$\frac{w}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-9000\pi x,$$

donde w es el peso del cilindro y $g = 9{,}8\ m/s^2$; en consecuencia

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{88200}{w}\pi x = 0,$$

cuya solución es

$$x(t) = c_1 cos\left(\sqrt{\frac{88200\pi}{w}}t\right) + c_2 sen\left(\sqrt{\frac{88200\pi}{w}}t\right),$$

vemos que el periodo es $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{88200\pi}{w}}} = \frac{2\sqrt{\pi w}}{\sqrt{88200}}$, es decir para $t = 1\ s$

$$t = \frac{2\sqrt{\pi w}}{\sqrt{88200}} = 1$$

de donde $w = 7018{,}72\ kg$.■

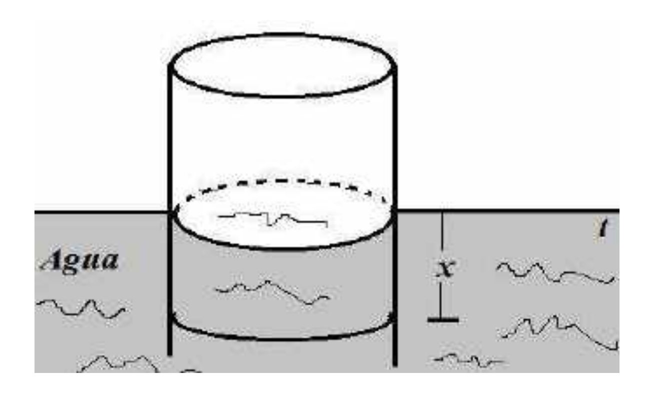


Figura 6.25. Cilindro sumergido en agua.

PROBLEMAS 6.5

1. Una bola de hierro suspendida por un hilo de masa despreciable desde un cilindro que flota parcialmente sumergido en el agua. El cilindro tiene una altura de 6 cm, un área de base 12 cm^2 en la parte superior y en el fondo y una densidad de 0,30g/cm^3, se tiene que 2 cm de su altura está sobre la superficie del agua. (a) ¿Cuál es el radio de la bola de hierro? Si la densidad de la bola de hierro es 9,90 g/cm^3. (b) suponga ahora que se rompa el hilo, de modo que el cilindro está oscilando en movimiento armónico simple, ¿Cuál es el periodo de oscilación?

   R. $R = 9{,}71\ mm$; $T = 0{,}269\ s$.

2. Una caja cúbica de 2 metros de lado flota en agua. La caja sube y baja con un período de un segundo. Si la densidad del agua es 1000 kg/m^3, calcule el peso de la caja.
   R. 496,5 kg.
3. Una boya cilíndrica de 950 kg y 0,900 m de diámetro flota verticalmente en agua salada. (a) calcule la distancia adicional que la boya se hundirá si un hombre de 70 kg, se para sobre ella. (b) calcule el periodo del movimiento armónico simple que se produce cuando el hombre se hecha al agua, desprecie la amortiguación por fricción del fluido.
   R. $x = 0{,}107\ m$; $T = 2{,}42\ s$.

6.9 DEFLEXÍON DE VIGAS

Trataremos una aplicación a deflexión de vigas. Es conocido que las vigas hoy en día constituyen uno de los elementos estructurales más importantes en ingeniería, se utiliza en una amplia variedad de obras en edificios, puentes y otros. Una viga es un elemento constructivo lineal que trabaja principalmente a flexión. En las vigas la longitud predomina sobre las otras dimensiones y suelen ser horizontal. El esfuerzo de flexión provoca tensión de tracción y compresión, produciéndose los máximos en el cordón inferior, las cuales se obtienen relacionando el momento flector y el segundo momento de inercia; las vigas pueden ser de hierro, madera, hormigón u otros.

Las vigas al soportar cargas de otras estructuras, también de su propio peso, ocasionan que estos se flexionen. Los métodos para obtener la deflexión de vigas son variados, aquí aplicaremos ecuaciones diferenciales, en general se obtiene por una ecuación de cuarto orden, analizaremos en detalle.

Una variedad de estructuras se construye usando vigas, y estas se flexionan o deforma bajo su propio peso o por la influencia de alguna fuerza externa; al ser miembros estructurales están sometidas a cargas laterales; es decir a fuerzas o momentos que tiene sus vectores perpendiculares al eje de la barra; así las vigas se encargan de recibir las cargas de las losas y al mismo tiempo trasmitir estas cargas a las columnas de la estructura. Las cargas que actúan sobre una viga hacen que este se flexione, con lo que su eje se deforme en una curva, dicha flexión o deflexión es una respuesta estructural a una deformación que se produce en las vigas (Lambé, 1964).

Supondremos que la carga aplicada a la viga es tal que no produce deformación permanente, y que la deformación debida a su propio peso es despreciable. El problema consiste en determinar la flexión de una viga sometida a una carga. Inicialmente la viga es recta y su eje central coincide con el eje X, figura 6.26, posteriormente dicho eje se ha desplazado debido a la acción de la carga, figura 6.27; se desea obtener la ecuación de la curva discontinua, llamada elástica, que nos da la deformación de la viga.



Figura 6.26: Distribución de una viga horizontal**.**

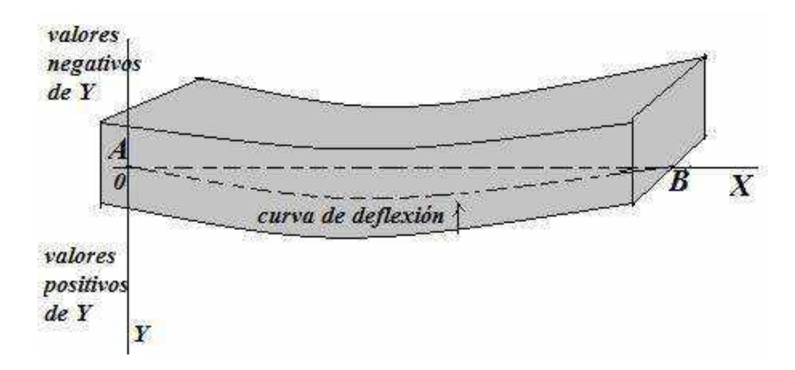


Figura 6.27: Aplicación de carga a la viga: se produce la curva de deflexión**.**

Consideremos una viga horizontal AB, se asume que la viga es uniforme en su sección transversal y de materia homogénea. Hay muchas formas de apoyar las vigas, figura 6.27, veremos los más comunes; (a) Viga simplemente apoyada, cuando las vigas están apoyadas en los extremos A y B, no empotrada; (b) Viga interconstruida, es decir empotrada en los extremos A y B; (c) Viga en voladizo; cuando en el extremo A está rígidamente fijo, mientras el extremo B está libre para

moverse. Por tanto, son casos que traducen según las condiciones de frontera que analizaremos. Existen más formas y también más condiciones para la deflexión que son aplicados a cada tipo de problema; de la misma forma como hay diferentes maneras de apoyar vigas, también hay diferentes maneras de aplicar fuerza de carga externa. (a) Carga uniforme distribuida sobra toda la viga; (b) carga variable sobre toda la viga o sólo en una parte de ella: (c) carga puntual o concentrada.

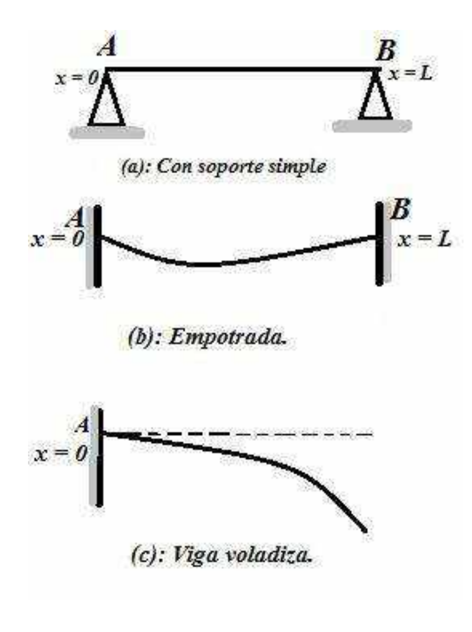


Figura 6.28: Formas de sostener una viga**.**

Para poder formular la ecuación, sea $M(x)$ el momento flector en una sección transversal vertical de la viga en x. Este momento flector se define como la suma algebraica de los momentos de esa fuerzas que actúan sobre un lado de x, los momentos se toman sobre la línea horizontal en la sección transversal en x. Al obtener los momentos convendremos de que fuerzas hacia arriba producen momentos negativos y fuerzas hacia abajo dan momentos positivos; por eso se tomó el eje Y hacia abajo como positivo. No importa cuál lado de x se tome, debido a que los momentos flectores calculados desde cualquier lados son iguales. Resulta que el momento flector en x está asociado con el radio de curvatura de la curva elástica o curva de deflexión en x, siendo esta relación: $M(x) = EIk$, siendo κ la curvatura en un punto y como se sabe está dado por

$$\kappa = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \frac{d^2y}{dx^2},$$

entonces se produce la ecuación

$$\frac{EI}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \frac{d^2y}{dx^2} = M(x)\,,$$

donde E es el módulo de elasticidad de Young y depende del material usado en la viga, mientras que I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga en x con respecto a una línea horizontal que pasa por el centro de gravedad de esta sección transversal. El producto EI se denomina *rigidez flexional* de la viga y se considera como una constante.

Sabemos que $\frac{dy}{dx}$ representa la pendiente de la curva elástica en un punto cualquiera y si la deflexión $y(x)$ es pequeña o para deformaciones pequeñas ésta pendiente también es pequeña, es decir $\frac{dy}{dx} \to 0$ son tan pequeños comparado con la unidad; entonces para muchos propósitos prácticos la viga debe doblarse sólo levemente; así $\kappa \cong \frac{d^2y}{dx^2}$, luego, la ecuación anterior se puede reemplazar por una buena aproximación

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x). \qquad \text{(a)}$$

En la teoría elasticidad se muestra que el momento de flexión $M(x)$ en un punto x a lo largo de la viga se relaciona con la carga por unidad de longitud $w(x)$ mediante la ecuación

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w(x) \qquad \text{(b)}$$

como el momento de flexión $M(x)$ es proporcional a la curvatura derivando dos veces en (a) y reemplazando en (b) se tiene la ecuación

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x), \qquad \text{(c)}$$

es decir, en general la deflexión $y(x)$ satisface una ecuación diferencial de cuarto orden.

Las condiciones de frontera (contorno o región donde está definida la ecuación diferencial) asociado con la ecuación (c) depende de los apoyos extremos de la viga:

(i) Apoyados. Las condiciones de frontera son: $y(0) = 0$; $y''(0) = 0$; $y(L) = 0$; $y''(L) = 0$.

(ii) Empotrados en los extremos. Las condiciones en la frontera son: : $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$; $y(L) = 0$; $y'(L) = 0$.

(iii) Libres o voladizo. Las condiciones en la frontera del lado en voladizo son: : $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$; $y''(L) = 0$; $y'''(L) = 0$.

Se puede observar que el significado de $y(x)$: deflexión; $y'(x)$: giro; $y''(x) =$ Momento; $y'''(x) =$ cortante; $y^{(4)}(x) =$ carga distribuida.

Para obtener la ecuación de la curva de deflexión se podría utilizar directamente la ecuación (c), o bien en lo que sigue analizamos varios casos.

VIGA HORIZONTAL SIMPLEMENTE APOYADA: Longitud de la viga L, se dobla bajo su propio peso, el cual es w por unidad de longitud. Obtener la ecuación de su curva elástica.

En la figura 6.29, se muestra la curva elástica de la viga (línea discontinua) relativa a un conjunto de ejes coordenados con origen 0 y direcciones positivas indicadas; debido a que la viga está soportada en 0 y en B, cada uno de estos soportes lleva la mitad del peso de la viga, es decir $\frac{wL}{2}$. El momento flector $M(x)$ es la suma algebraica de estas fuerzas actuando a un lado del punto C.

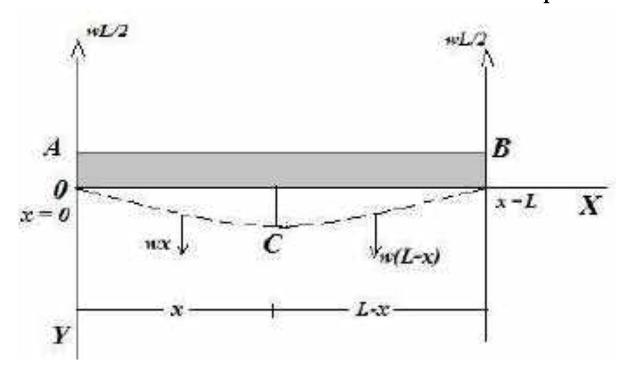


Figura 6.29: Viga simplemente apoyada.

Escogiendo el lado derecho de C, actuarían dos fuerzas: (i) la fuerza hacia arriba $\frac{wL}{2}$, a una distancia $(L - x)$ del punto C, produciendo un momento negativo; (ii) la fuerza hacia abajo $w(L - x)$, a una distancia $\frac{L-x}{2}$ de C produciendo un momento positivo. En este caso el momento flector:

$$M(x) = w(L - x)\left(\frac{L-x}{2}\right) - \frac{wL}{2}(L - x) = \frac{wx^2}{2} - \frac{wLx}{2},$$

así la ecuación diferencial es

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wx^2}{2} - \frac{wLx}{2},$$

al ser una ecuación sencilla, integrando dos veces se obtiene

$$EIy(x) = \frac{wx^4}{24} - \frac{wLx^3}{12} + c_1x + c_2.$$

Aplicamos las condiciones de frontera, puesto que la viga no tiene deformación en los extremos o apoyos, estas condiciones son: $y(0) = 0$ se tiene $c_2 = 0$, mientras $y(L) = 0$ da $c_1 = -\frac{wL^3}{24}$ y tenemos finalmente que la curva elástica es

$$y(x) = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x).$$

Si queremos la máxima deflexión, usamos la simetría, así el máximo ocurre en $x = \frac{L}{2}$, entonces la flecha máxima es

$$y_{máx}(y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5wL^4}{384EI}. \blacksquare$$

ANALISIS DE LOS OTROS CASOS

Nos parece importante y hasta didáctico obtener la curva elástica a partir de la ecuación diferencial de cuarto orden (c), cuando la única fuerza distribuida a lo largo de la viga tiene que ver con su propio peso, $w(x) = libras/pie$, donde

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \left(\frac{1}{EI}\right)w \qquad \text{(d)}$$

es proporcional a w; aquí E señala de que material se está hablando, mientras que I indica el momento de inercia de la sección transversal de la viga sobre una línea horizontal que pasa por el centro de gravedad de la sección transversal; existen tablas establecidas para obtener el módulo de Yung E según sean los materiales, de la misma forma para obtener el momento de inercia. Por ejemplo, para una sección circular, $I = \frac{1}{4}\pi r^2$ con radio r; para una sección corona circular $I = \frac{1}{4}\pi(R^2 - r^2)$ con radios R y r radios; para una sección rectangular $I = \frac{ab^3}{12}$ con lados a y b; etc. Sin embargo, $F(x)$ denota la densidad de la fuerza que actúa verticalmente sobre la viga en el punto x.

El módulo de Young (Tomas Young) o módulo de elasticidad longitudinal es un parámetro que caracteriza el comportamiento de un material elástico, según la dirección en la que se aplica la fuerza. Tanto el módulo de Young como límite elástico son distintos para diversos materiales, $módulo\ Young = \frac{esfuerzo\ longitudinal}{deformación\ longitudinal} = \frac{N}{m^2} = Pa$. Mientras que, El momento de inercia es una medida de inercia rotacional de un cuerpo. Cuando un cuerpo gira entorno a uno de los ejes principales, la inercia

rotacional puede ser representada como una magnitud vectorial llamada momento de inercia.

En la ecuación (d), integrando cuatro veces se obtiene

$$y(x) = \frac{w}{24EI}x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \qquad \text{(e)}$$

donde A, B, C y D son constantes que se puede encontrar cuando se aplican las condiciones de frontera, como veremos.

(a) Si la viga se sostiene en los extremos, es decir con soporte simple, las condiciones de frontera son: $y(0) = 0$, $y(L) = 0$, $y''(0) = 0$ y $y''(L) = 0$, la curva elástica es

$$y(x) = \frac{w}{24EI}[x^4 - 2Lx^3 + L^3x],$$

donde el máximo ocurre en $x = \frac{L}{2}$ y por tanto,

$y_{máx} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5WL^4}{384EI}$.

(b) Cuando la curva de deflexión de la viga es voladiza, en este caso las condiciones de frontera son: $y(0) = 0$, $y''(L) = 0$, $y'(0) = 0$ y $y'''(L) = 0$.
En este caso, $y(0) = 0$ se tiene $D = 0$, $y'(0) = 0$ da $C = 0$, sin embargo al ser

$$y''(x) = \frac{wx^2}{2EI} + 6Ax + 2B\ ,$$
$$y'''(x) = \frac{wx}{EI} + 6A\ ,$$

Con $y''(L) = 0$ y $y'''(L) = 0$ se obtiene $A = -\frac{WL}{6EI}$ y $B = \frac{WL^2}{4EI}$, luego reemplazando en la ecuación (e) resulta

$$y(x) = \frac{wx^4}{24EI} - \frac{wLx^3}{6EI} + \frac{wL^2x^2}{4EI}$$
$$= \frac{w}{24EI}[x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2],$$

es la forma que adopta una viga voladiza fija en $x = 0$ y libre en $x = L$. La curva tiene $y'(0) = 0$, sólo en $x = 0$ ya después todas las tangentes no son horizontales, de manera que la máxima deflexión de la viga voladiza ocurre en $x = L$, y es

$$y_{máx} = y(L) = \frac{w}{24EI}[L^4 - 4L^4 + 6L^4] = \frac{wL^4}{8EI}. \blacksquare$$

(c) Empotrados en los extremos: en este caso se cumplen las condiciones en la frontera son, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(L) = 0$ y $y'(L) = 0$, siendo la ecuación elástica en general

$$y(x) = \frac{w}{24EI}x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

aplicando las condiciones de frontera, $y(0)=0$ da $D=0$; siendo $y'(x)=\frac{w}{6EI}x^3+3Ax^2+2Bx+C$ se tiene que $y'(0)=0$ da $C=0$, luego al ser

$$y(x)=\frac{w}{24EI}x^4+Ax^3+Bx^2\ ,\ y'(x)=\frac{w}{6EI}x^3+3Ax^2+2Bx$$

las condiciones de frontera producen

$$y(L)=0,0=\frac{w}{24EI}L^4+AL^3+BL^2$$

$$y'(L)=0,0=\frac{w}{6EI}L^3+3AL^2+2BL$$

de donde $A=-\frac{wL}{12EI}$, $B=\frac{WL^2}{24EI}$.

Por tanto, la curva elástica es

$$y(x)=\frac{w}{24EI}[x^4-2Lx^3+L^2x^2].$$

haciendo $y'(x)=0$, se tiene $x=0, x=L, x=\frac{L}{2}$, en este caso la máxima deflexión ocurre en $x=\frac{L}{2}$ y es

$$y_{máx}=y\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{W}{384EI}L^4.$$

que viene a ser un quinto de la correspondiente a una viga con suspensión simple en sus extremos.

Ejemplo 21. Se quiere calcular la deflexión máxima de una barra de acero sostenida simplemente de una longitud de 18 pies, con sección transversal circular de 1,2 pulgada de diámetro.

Solución. En algún manual podemos encontrar que el acero común tiene densidad media $\delta=7{,}75g/cm^3$ y que su módulo de Yung es $E=2x10^{12}g/cm.s^2$, al ser conveniente trabajar con unidades del sistema cgs, entonces debemos realizar algunas conversiones, para $L=(18pies)\left(30{,}48\frac{cm}{pies}\right)=548{,}64\ cm$; radio

$$r=\left(\frac{1{,}2}{2}pulg\right)\left(\frac{2{,}54cm}{pulg}\right)=1{,}524\ cm;$$

si la densidad lineal de masa es $\rho=\pi r^2\delta=\pi(1{,}524)^2(7{,}75)=56{,}547\frac{g}{cm}$; de modo que el peso $w=\rho g=\left(56{,}547\frac{g}{cm}\right)\left(980\frac{cm}{s^2}\right)=55416{,}06\frac{dinas}{cm}$.

El momento de inercia del área de un disco circular de radio r con respecto a un diámetro es $I=\frac{1}{4}\pi r^4=\frac{1}{4}\pi(1{,}524)^4\cong 4{,}237\ cm^4$, por tanto

$$y_{máx}=\frac{5wL^4}{384EI}=\frac{5(55416{,}06)(548{,}64)^4}{384(2x10^{12})(4{,}237)}\cong 15{,}43\ cm.$$

es decir aproximadamente unos 6,07 pulgadas como deflexión máxima de la varilla en su punto medio, como $y_{máx} = \left(\frac{5w}{384EI}\right)L^4$ se tiene $y_{máx}$ es proporcional a L^4. ■

Ejemplo 22. Una viga de 10 m de longitud está apoyada en dos columnas verticales. Si la viga tiene una carga uniforme de 400 kg por metro de longitud y una carga al centro de 5000 kg. Obtener la curva elástica de la viga.

Solución. En la figura 6,29, vemos que las fuerzas actúan sobre OC son: (a) una fuerza aplicada en O a x metros de C, dirigida hacia arriba e igual a la carga total y es $F_1 = \frac{1}{2}(5000 + 10(400))$; (b) una fuerza de $F_2 = 400x$ dirigida hacia abajo que se supone concentrada en el punto medio $0C$.

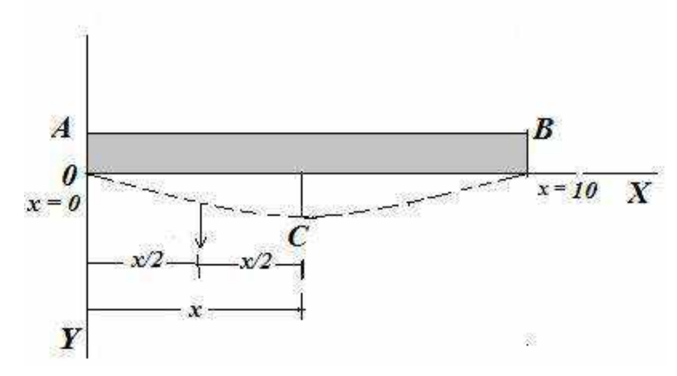


Figura 6.30: Curva elástica.

Siendo $d_1 = x$, $d_2 = \frac{x}{2}$, el momento flexionante (flector) en C es $M(x) = F_1 d_1 - F_2 d_2$,

$$M(x) = \frac{1}{2}(5000 + 10(400))x - 400x\left(\frac{x}{2}\right),$$

y la ecuación diferencial se escribe

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 4500x - 200x^2,$$

integrando directamente dos veces se obtiene la ecuación

$EIy(x) = \frac{2225}{3}x^3 - \frac{50}{3}x^4 + c_1x + c_2$

que satisface las condiciones iniciales: $y(0) = 0$ y $y(10) = 0$ siendo $c_2 = 0$ y $c_1 = -57500$. Por tanto, la curva elástica de la viga es

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{2225}{3}x^3 - \frac{50}{3}x^4 - 57500x\right). ■$$

Ejemplo 23. Una viga uniforme de longitud 5 metros, simplemente apoyados se flexiona bajo su propio peso, que es de 2 kg/m. Obtener la ecuación de la curva elástica.

Solución. Al ser una viga simplemente apoyada, en general la ecuación de la curva elástica es

$$y(x) = \frac{w}{24EI}[x^4 - 2Lx^3 + L^3x]$$

y al ser $L = 5\ m$, $w = 2\ kg/m$, se obtiene la curva elástica

$$y(x) = \frac{1}{12EI}[x^4 - 10x^3 + 125x]. \blacksquare$$

Ejemplo 24. Una viga uniforme de longitud 5 metros, y con peso 2 kg/m, tiene libre un extremo. Obtener la ecuación de la curva elástica y la flecha del extremo libre.

Solución. En general, al ser una viga voladiza, es decir apoyada en un extremo y libre en el otro, la ecuación de la curva elástica es

$$y(x) = \frac{w}{24EI}[x^4 - 4Lx^3 + 6L^2L^2]$$

siendo $L = 5\ m$, $w = 2\ kg/m$, se obtiene la curva elástica

$$y(x) = \frac{1}{12EI}[x^4 - 20x^3 + 150x^2]. \blacksquare$$

La flecha será la deformación máxima que ocurre cuando $x = L = 5m$, es hacia abajo

$$y_{máx} = \frac{w}{8EI}L^4 = \frac{625}{4EI}. \blacksquare$$

Ejemplo 25. Una viga horizontal de 9 metros de longitud está empotrada en ambos extremos. Obtener la ecuación de la curva elástica y su máxima deformación vertical cuando tiene una carga uniforme de 1 kg/m.

Solución. En general, al ser una viga empotrada en ambos extremos, sula curva elástica es

$$y(x) = \frac{w}{24EI}[x^4 - 2Lx^3 + L^2L^2]$$

siendo $L = 9\ m$, $w = 1\ kg/m$, se obtiene la curva elástica

$$y(x) = \frac{1}{12EI}[x^4 - 18x^3 + 81x^2]. \blacksquare$$

La flecha será la deformación máxima que ocurre cuando $x = \frac{L}{2} = \frac{9}{2}m$, es hacia abajo

$$y_{máx} = \frac{w}{384EI}L^4 = \frac{6561}{6144EI}. \blacksquare$$

PROBLEMAS 6.6

1. Una viga horizontal de 8 metros está empotrada en un extremo y apoyada en el otro; a) obtener la ecuación de la curva elástica si la viga tiene una carga uniforme de 4 kg/m y soporta un peso de 100 kg en el punto medio; b) determine el punto en el cual la flecha es máxima.

   R. $y(x)=\begin{cases}\frac{1}{24EI}(4x^4-2184x^3-335x^2), & 0\le x\le \frac{L}{2}\\ \frac{1}{24EI}(4x^4+45x^3-2616x^2+19200x-25600), & \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases}$, $x\approx 4{,}45\ m$.

2. Calcule la máxima deflexión de una varilla de acero con soporte simple, la longitud de la varilla es 20 pies y con una sección transversal circular de una pulgada de diámetro. Asuma que la densidad del acero como $\delta=7{,}75\ g/cm^3$ y su módulo de Young $E=2x10^{12}g/cm.s^2$.

   R. 16,96 cm.

3. Determine la forma de una viga voladiza de longitud L que se encuentra fija en $x=0$ y libre en $x=$ L. Obtener su deflexión máxima.

4. Una viga horizontal simplemente apoyada tiene una longitud de 10 metros y en peso despreciable, pero sufre una carga concentrada de 40 kilogramos que está a una distancia de 2 metros del extremo izquierdo (origen). Obtener la ecuación de la curva elástica.

   R. $y(x)=\begin{cases}\frac{1}{3EI}(-4x^3-400x), & 0\le x\le 2\\ \frac{1}{3EI}(16x^3-120x^2-400x), & 2\le x\le 10\end{cases}$

5. Obtener la forma de una viga que está fija en los extremos, siendo $x=0$ y $x=L$. Demuestre que la máxima deflexión de la figa es $\frac{wL^4}{348EI}$.

6. Una viga horizontal de 8 metros de longitud está empotrada en sus extremos y libre en el otro. Si la carga uniformemente repartida es 4 kg/m. Determine: a) la ecuación de su curva logística; b) la flecha máxima.

   R. $y(x)=\frac{1}{6EI}(x^4-32x^3+384x^2)$, $y_{máx}=\frac{2048}{EI}$.

7. Una viga de 8 m de longitud está apoyada en dos columnas verticales. Si la viga tiene una carga uniforme de 500 kg por metro de longitud y una carga al centro de 5000 kg. Muestre la curva elástica de la viga.

   R. $y(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{2225}{3}x^3-\frac{125}{3}x^4-36800x\right)$.

8. Una viga horizontal de 12 metros de longitud está empotrada en ambos extremos. Si tiene una carga uniformemente distribuida de $3\,kg/m$. Determine la ecuación de la curva elástica y la flecha máxima.
R. $y(x)=\frac{1}{8EI}(x^4-24x^3+144x^2)$, $y_{máx}=\frac{162}{EI}$.

6.10 MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA

Conforme a la segunda Ley de Newton, la ecuación del movimiento de una partícula, es

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F \qquad (p_1)$$

donde m es la masa de la partícula, $\frac{d^2x}{dt^2}$ es la aceleración de la partícula relativa a algún sistema de referencia , F es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Estudiamos varios casos donde la resistencia del aire es un factor importante en el tratamiento de diversos problemas.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Partícula proyectada verticalmente hacia arriba.- en este caso, asumimos que las únicas fuerzas que actúan son: (a) la fuerza gravitacional mg, donde m es la masa de partícula; (b) una fuerza de resistencia proporcional al producto del cuadrado de su velocidad por su masa, es decir $km\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$. Señalando que $x(t)$ es la altura en que se encuentre medida desde el punto de propulsión en un instante t después, y por $v=\frac{dx}{dt}$ su velocidad; sustituyendo en (p_1) se obtiene

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg-km\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

Lo cual es una ecuación diferencial de segundo orden y no lineal, usando la relación $v=\frac{dx}{dt}$ se reduce a

$$\frac{dx}{dt}=-g-k(v)^2, \qquad (p_2)$$

al separable, integrando

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{1+\left(\sqrt{\frac{k}{g}}v\right)^2}=\int_0^t -g\,dt$$

con solución

$$\frac{1}{\sqrt{kg}}arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}}v(t)\right) = -t + \frac{1}{\sqrt{kg}}arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}}v_0\right).$$

Si queremos el tiempo que debe transcurrir para alcanzar su altura máxima, entonces se hace $v(t) = 0$, y se tiene

$t_1 = \frac{1}{\sqrt{kg}}arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}}v_0\right)$.■

Por otro lado, se puede calcular la altura máxima asociado en el tiempo t_1; es decir $x(t_1) = x_1$; entonces escribiendo la ecuación (p_2) en términos de x; así

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

que reemplazando da $v\frac{dv}{dx} = -g - kv^2$, ecuación separable por integración

$$\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{g+kv^2} = -\int_0^x dx$$

al ser $x(0) = 0$ la altura inicial y velocidad $v(0) = v_0$; luego

$$ln(g + kv^2) - ln(g + kv_0^2) = -2kx.$$

La altura máxima ocurre cuando $v(x_1) = 0$, así la ecuación queda

$$ln(g) - ln(g + kv_0^2) = -2kx_1,$$

de donde $x_1 = \frac{1}{2k}ln\left(1 + \frac{k}{g}v_0^2\right)$. ■

Partícula proyectada verticalmente hacia abajo.- en este caso, se asume que las únicas fuerzas actúan son: (a) la fuerza gravitacional mg, donde m es la masa de la partícula; (b) una fuerza de resistencia proporcional al producto del cuadrado de su velocidad por su masa $km\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$. Si llamamos por $x(t)$ la distancia recorrida por la partícula en un instante t después, y siendo $v = \frac{dx}{dt}$ su velocidad se obtiene la ecuación,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - km\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

en este caso la fuerza gravitacional sigue el movimiento de la partícula, entonces si escribimos $v = \frac{dx}{dt}$ se obtiene la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2, \qquad (p_3)$$

y cumple la condición inicial $v(0) = v_0$ la velocidad inicial, para la solución de la ecuación (p_3) se tiene en cuenta:

Si $v_0 = \sqrt{\frac{g}{k}}$, se tiene la solución constante $v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}$, y entonces $x(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}t$.

Si $v_0 \neq \sqrt{\frac{g}{k}}$ la ecuación (p_3) es separable, luego integrando (usar fracciones parciales)

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{1-\sqrt{\frac{k}{q}}v} + \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{1+\sqrt{\frac{k}{q}}v} = \int_0^t 2g dt,$$

es decir

$$\sqrt{\frac{g}{k}}\left[-ln\left(\frac{1-\sqrt{\frac{k}{g}}v(t)}{1-\sqrt{\frac{k}{g}}v_0}\right) + ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{k}{g}}v(t)}{1+\sqrt{\frac{k}{g}}v_0}\right)\right] = 2gt\,. \qquad (p_4)$$

Cabe destacar que la ecuación diferencial cumple las condiciones del teorema de existencia y unicidad de soluciones, y al ser $v_1(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}$ solución, entonces la condición $v_0 < \sqrt{\frac{g}{k}}$ significa que $v(t) < \sqrt{\frac{g}{k}}$, es decir $\sqrt{\frac{k}{g}}\,v(t) - 1 < 0, \forall t \geq 0$. De la misma forma $v_0 > \sqrt{\frac{g}{k}}$ entonces $v(t) > \sqrt{\frac{g}{k}}$, es decir $\sqrt{\frac{k}{g}}\,v(t) - 1 > 0, \forall t \geq 0$; esto es en cualquiera de los dos casos se tiene

$$\frac{1-\sqrt{\frac{k}{g}}v(t)}{1-\sqrt{\frac{k}{g}}v_0} > 0, \forall t \geq 0.$$

De la ecuación (p_4), exponenciando resulta

$$\left(\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v(t)}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v(t)}\right)\left(\frac{\sqrt{g}-\sqrt{k}v_0}{\sqrt{g}+\sqrt{k}v_0}\right) = e^{2\sqrt{kg}t},$$

en esta ecuación se debe despejar $v(t)$, pero abreviar, denotando $c_1 = \frac{\sqrt{g}-\sqrt{k}v_0}{\sqrt{g}+\sqrt{k}v_0}$, entonces

$$c_1\left(\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v(t)}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v(t)}\right) = e^{2\sqrt{kg}t},$$

de donde

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\left(\frac{e^{2\sqrt{kg}t}-c_1}{e^{2\sqrt{kg}t}+c_1}\right) = \frac{dx}{dt},$$

es una ecuación diferencial de variable separable, integrando

$$\int_0^x dx = \sqrt{\frac{g}{k}} \int_0^t \frac{e^{2\sqrt{kg}t} - c_1}{e^{2\sqrt{kg}t} + c_1} dt$$

la solución es

$$x(t) = \frac{1}{k} ln\left(\frac{c_1+e^{2\sqrt{kg}t}}{1+c_1}\right) - \sqrt{\frac{g}{k}}\,t. \qquad (p_5)$$

Se puede observar que si $v_0 = \sqrt{\frac{g}{k}}$, resulta que $c_1 = 0$ y si reemplazamos $c_1 = 0$ en (p_5) se recupera $x(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}$ que es la solución obtenida anteriormente.

Partícula proyectada hacia arriba desde la superficie de la luna. En este caso la única fuerza que domina, es la fuerza gravitacional, lo cual varía con la altura. Es conocido que la fuerza gravitacional de la luna o cualquier planeta varía inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro. Esto modela la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x^2},$$

en este caso $x(t)$ modela la distancia a que se encuentra la partícula en el momento t, medido desde el centro de la luna.

Ahora como $v = \frac{dx}{dt}$, entonces $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ que reemplazando en la ecuación se obtiene

$$mv\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{x^2},$$

integrando

$$\int_{v_0}^{v} mvdv = -\int_{x_0}^{x} \frac{k}{x^2}dx,$$

y se obtiene $v^2(x) = \frac{2}{m}\left(\frac{k}{x} - \frac{k}{x_0} + \frac{m}{2}v_0^2\right)$. ■

Por otro lado, considerando que r sea el radio medio de la luna, haciendo que $k = mg_0r^2$ donde g_0 es la gravedad sobre la superficie de la luna, entonces sustituyendo en la última ecuación resulta

$$v^2(x) = 2g_0r\left(\frac{r}{x} - 1 + \frac{v_0^2}{2g_0r}\right).$$

Cuando $\frac{v_0^2}{2g_0r} - 1 > 0$, entonces $v(x) > 0$, esto quiere decir que la partícula escapa del campo gravitacional de la luna, mientras que si $\frac{v_0^2}{2g_0r} - 1 < 0$, entonces existe cierta altura x_1 en la cual $v(x) = 0$, esto explica que la partícula alcanza una altura máxima x_1 y después regresa a la superficie de la luna. Esta x_1 se puede calcular haciendo $v(x) = 0$ en la ecuación $0 = 2g_0r\left(\frac{r}{x} - 1 + \frac{v_0^2}{2g_0r}\right)$ se obtiene $x_1 = \frac{r}{1-\frac{v_0^2}{2g_0r}}$. ■

Para calcular el tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima x_1, primero hay resolver la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2g_0 r\left(\frac{r}{x} - 1 + \frac{v_0^2}{2g_0 r}\right)}$ y luego encontrar $x(t_1) = x_1$.

PROYECTILES - SIN RESISTENCIA DEL AIRE

Supongamos que hay una velocidad inicial y después está sometido sólo al campo gravitacional. Sean $-mg\vec{k}$ una fuerza gravitacional actuante. Sean x, z las coordenadas del plano del movimiento, $\vec{v}_0 = v_o(\cos(\theta))\vec{\imath} + (sen(\theta))\vec{k}$ es un vector velocidad inicial; mientras que $r(t) = (x(t), z(t))$ es la posición del proyectil en el instante t. La ecuación del movimiento es

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -mg\vec{k},$$

integrando vectorialmente

$$\frac{dr}{dt} = -g\vec{k}t + r'(0) = g\vec{k}t + \vec{v}_0,$$

$$r(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{k} + \vec{v}_o t$$

significa que

$$r(t) = (x(t), z(t)) = \left(v_0\cos(\theta)\, t, v_0 sen(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

de donde $x(t) = v_0\cos(\theta)\, t$ y $z(t) = v_0 sen(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$, en vista de que $t = \frac{x(t)}{v_0\cos(\theta)}$ se obtiene la ecuación

$$z(x) = \tan(\theta)\, x - \frac{g}{2(v_0\cos(\theta))^2}x^2.$$

Cuando se hace que la derivada sea cero, es decir $z'(x) = 0$, se obtiene la ecuación $0 = \tan(\theta) - \frac{g}{(v_0\cos(\theta))^2}x$, de donde se deduce que la máxima altura es

$$x = \frac{v_0^2 sen(2\theta)}{2g}.\blacksquare$$

Blanco del proyectil. Cuando se hace $z(x) = 0$, ocurre que $x = 0$ o también la ecuación $\tan(\theta) - \frac{g}{2(v_0\cos(\theta))^2}x = 0$, es decir

$$x = \frac{v_0^2 sen(2\theta)}{g}.\blacksquare$$

Distancia mínima. Ocurre para un ángulo $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$, lo cual es $x = \frac{v_0^2}{g}$, como se observa que $x = \left(\frac{1}{g}\right) v_0^2$, entonces se dice que es proporcional al cuadrado de la velocidad inicial.

CAÍDA LIBRE

Este es caso, cuando la resistencia del aire no es proporcional al cuadrado de su velocidad, entonces las ecuaciones anteriores se modifican ligeramente. Se considera la caída vertical de un cuerpo de masa m que está afectado por dos fuerzas: la aceleración de la gravedad y la resistencia del aire proporcional a la velocidad del cuerpo. Asumiendo que tanto la gravedad como la masa permanecen constantes y que la dirección positiva es hacia abajo.

Por la segunda ley de Newton,

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}, a = \frac{dv}{dt}.$$

La fuerza de la gravedad dada por el peso w del cuerpo es $w = mg$ donde $g = 9{,}81\ m/s^2$. La fuerza debida a la resistencia del aire es $-kv$, $k \geq 0$, negativa actúa opuesto a la velocidad; k es la constante de proporcionalidad. Entonces, todas las fuerzas sobre el cuerpo, es

$$F = mg - kv,$$

es decir $m.\frac{dv}{dt} = mg - kv$, de donde se obtiene la ecuación del movimiento del cuerpo,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g,$$

esta ecuación diferencial es lineal y tiene como solución general

$$v(t) = \frac{mg}{k} + ce^{-\frac{k}{m}t}, c \text{ constante. } \blacksquare$$

La velocidad límite se obtiene haciendo $\lim_{t\to\infty} v(t)$ que viene a ser $v_1 = \frac{mg}{k}$.

Si la resistencia del aire es despreciable, entonces $k = 0$, y en este caso la ecuación se reduce a

$$\frac{dv}{dt} = g$$

con solución $v(t) = gt + c_1$.■

Ejemplo 26. Un paracaidista de peso (masa) 70 kg se deja caer de un helicóptero que se mantiene a 5 500 metros de altura. Asumiendo que cae bajo la influencia de una fuerza gravitacional constante y que la resistencia del aire es proporcional

a la velocidad del paracaidista; siendo la constante de proporcionalidad de 10 kg/s cuando el paracaídas está cerrado y 100 kg/s cuando el paracaídas está abierto. Si el paracaídas se abre 1 minuto después que el paracaidista abandona el helicóptero. Obtener la ecuación cuando el paracaídas se abre.

Solución. Sea $x(t)$ la distancia relativa al helicóptero en que se encuentra el paracaidista en el instante t, entonces la ecuación del movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt},$$

y como $\frac{dx}{dt} = v$ entonces $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$ al ser una ecuación separable se tiene

$$v(t) = \frac{m}{k}g + \left(v_0 - \frac{m}{k}g\right)e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Tenemos los datos: $m = 70\ kg$, $v_0 = 0$; $k = 10\ kg/s$; la gravedad 9,81 m/s^2; todos estos dato lo llevamos a la ecuación

$$v(t) = \frac{70}{10}(9{,}81)\left[1 - e^{-\frac{10}{70}t}\right] = 68{,}67\left(1 - e^{-\frac{1}{7}t}\right),$$

pero $v(t) = \frac{dx}{dt}$, entonces

$$x(t) = \int_0^t 68{,}67\left(1 - e^{-\frac{1}{7}t}\right)dt$$

$$x(t) = 68{,}67t + 480{,}69\left(e^{-\frac{1}{7}t} - 1\right).$$

Veamos la altura al cabo de un minuto ($t = 60s$), entonces

$$x(60) = 68{,}67(60) + 480{,}69\left(e^{-\frac{1}{7}(60)} - 1\right) \approx 3639{,}54\ m$$

y la velocidad es

$$v(60) = 68{,}67\left(1 - e^{-\frac{60}{7}}\right) = 68{,}66\ m/s.$$

Cuando el paracaídas de abre, se tiene la ecuación

$$v(t) = \frac{m}{k}g + \left(v_0 - \frac{m}{k}g\right)e^{-\frac{k}{m}t},$$

donde los datos son $k = 100\ kg/s$ y las condiciones iniciales $x(0) = 3639{,}54\ m$ y $v_0 = 68{,}66\ m/s$, entonces

$$v(t) = \frac{70}{100}(9{,}81) + \left[68{,}66 - \frac{70}{100}(9{,}81)\right]e^{-\frac{70}{100}t}$$

$$= 6{,}87 + 61{,}79e^{-\frac{7}{10}t},$$

por tanto, integrando la ecuación es

$$x(t) = 6{,}87t - 88{,}27e^{-\frac{7}{10}t}.\blacksquare$$

Ejemplo 27. Se lanza un proyectil hacia arriba con una velocidad inicial 50 m/s. Obtener: a) la velocidad a los 2 segundos; b) la altura máxima que alcanza; c) el tiempo en alcanzar la altura máxima.
Solución. La velocidad está dado por $v(t) = -gt + v_0$, siendo$v_0 = 50\, m/s$. Tenemos, a) la velocidad a los 2 segundos; $v(2) = (9{,}8(2) + 50)m/s = 39.4\, m/s$.
b) La máxima altura se calcula con la fórmula $x = \frac{v_0^2 sen(2\theta)}{2g}$ donde $g = 9{,}8\, m/s^2$, $\theta = 45°$, $v_0 = 50\, m/s$, y es

$$x_{máx} = \frac{(50)^1}{2(9{,}8)} \approx 12755\, m.$$

c) Por otro lado, si $t = \frac{v_0}{g} = \frac{50}{9.8} = 5{,}1$ segundos.
Ejemplo 28. Una masa de 2 kg cae desde el reposo por la acción de la gravedad y con resistencia despreciable del aire. Determine: a) un modelo del movimiento mediante una ecuación diferencial; b) la velocidad de la masa en cualquier instante $t \geq 0$; c) la velocidad después de 4 segundos; d) el tiempo que transcurre para que la velocidad sea de 80 $\frac{m}{s}$; e) la distancia obtenida por la masa durante los t segundos.
Solución. Es un problema con masa pequeño, resistencia despreciable, considerando hacia abajo la dirección positiva se tiene

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\ .$$

(a) Si $v(t) = \frac{dx}{dt}$ se tiene $v'(t) = g$ donde $g = 9{,}8\frac{m}{s}$ siendo $v(0) = 0$, entonces $v(t) = gt + c$, con $c = 0$.
(b) Se sabe que $v(t) = 9{,}8t\frac{m}{s}$ con $t \geq 0$.
(c) Después de 4 segundos se tiene $v(4) = 9{,}8(4) = 39{,}2\, m/s$.
(d) Cuando la velocidad es 80 m/s resulta $80 = 9{,}8t$ por lo que el tiempo $t \approx 8{,}2\, s$.
(e) Si $x(t)$ es la posición de la masa m con respecto a su punto de partida, entonces integrando $\frac{dx(t)}{dt} = 9{,}8t$ se obtiene $x(t) = 9{,}8\left(\frac{t^2}{2}\right) + c_1$ y que al ser $x(0) = 0$ que es la partida inicial, $c_1 = 0$; entonces la posición de la masa m después de t segundos es $x(t) = 4{,}9t^2$, esto mide la distancia recorrida por m durante un tiempo cualquiera t.

Ejemplo 29. Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad de 18 m/s y el aire no se opone al movimiento. Determinar: a) el movimiento mediante una ecuación diferencial; b) la velocidad de la pelota; c) el tiempo de subida de la

pelota y la máxima altura que alcanza; d) la velocidad de la pelota después de 1 y 2 segundos; e) el tiempo que tarda en regresar a su posición inicial.

Solución. No se considera resistencia del medio. Consideremos hacia arriba la dirección positiva, la masa también es pequeña. La ecuación es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg, \ w = mg \text{ (peso)}.$$

(a) La velocidad instantánea $v(t)$ es $v'(t) = -g$, es decir $v'(t) = -9{,}8\ m/s$; donde la velocidad inicial es $v(0) = 18\ m/s$.

(b) La velocidad de la pelota es $v(t) = -9{,}8t + c$ donde $c = 18\ m/s$: luego resulta
$$v(t) = -9{,}8t + 18\ m/s.$$

(c) La pelota sube mientras que su velocidad es positiva y se detiene en el instante t_1 en que $v(t_1) = 0$; es decir, $-9{,}8t_1 + 18 = 0$, de donde $t_1 = 1{,}8367$ s; es decir, durante 1,8367 segundos la pelota sube. Por otro lado, resolviendo la ecuación diferencial $v(t) = -9{,}8t + 18$ que al ser $v(t) = \frac{dx}{dt}$ se obtiene
$$x(t) = -9{,}8\left(\frac{t^2}{2}\right) + 18t + c$$
al satisfacer la condición $x(0) = 0$ entonces $c = 0$ y se tiene $x(t) = -4{,}9t^2 + 18t$. La altura máxima que alcanza la pelota es en $t_1 = 1{,}8367$ y es
$$x(t) = -4{,}9(1{,}8367)^2 + 18(1{,}8367) = 16{,}5307\ m.$$

(d) La velocidad de la pelota después de 1 segundo es $v(1) = -9{,}8 + 18 = 8{,}2\ m/s$, donde el signo positivo significa que la pelota se dirige hacia arriba. La velocidad de la pelota después de 2 segundos es $v(2) = -1{,}6\ m/s$, donde el signo negativo significa que la pelota se dirige hacia abajo.

(e) El tiempo que tarda la pelota en regresar a su posición inicial, es cuando $x(t) = 0$, es decir $-4{,}9t^2 + 18t = 0$ de donde $t_0 = 0$ o $t_2 = 3{,}6735\ s$. por lo tanto, el tiempo que tardará en regresar es $t_2 = 3{,}6735\ s$ que es el doble del tiempo t_1 que tarda la pelota en alcanzar la altura máxima.
Observación: En estos problemas al no considerar la resistencia del aire, los resultados pueden no ser ciertas del todo.

Ejemplo 30. Un paracaidista y paracaídas pesan 180 lb. En el momento en que el paracaídas se abre, él está viajando verticalmente hacia abajo a 38 pies/s. si la resistencia del aire varía de manera directamente proporcional a la velocidad instantánea y su magnitud es 160 lb cuando la velocidad es de 42 pies/s. Determinar: a) la velocidad y la posición del paracaidista en cualquier instante $t \geq 0$; b) la velocidad límite.

Solución. Consideremos que la dirección positiva $v(t)$ es hacia abajo y que $t \geq 0$ a partir de que el paracaídas se abre, la resistencia del aire es $-kv(t)$; las condiciones $v(0) = v_0 = 38\, pies/s$, $x(0) = 0 = x_0$; $w = mg$, al ser $w = 180\, lb$, entonces $m = \frac{180}{g} = \frac{180}{32} = \frac{45}{8}$, así $m = \frac{45}{8} slug$, pero como la resistencia es 160 lb, cuando $v = 42\, pies/s$ se tiene

$$160 = 42k,\ k = \frac{80}{21}.$$

(a) Tenemos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kv(t),\ v'(t) = \frac{d^2x}{dt^2},$$

es decir, $\frac{45}{8}v'(t) = 180 - \frac{80}{21}v(t)$, que representa una ecuación lineal con valor inicial

$$v'(t) + \frac{128}{189}v(t) = 32,\ v(0) = 38,$$

la ecuación tiene como factor integrante a $e^{-\frac{128}{189}t}$ y la solución es

$$v(t) = \frac{189}{4} - \frac{37}{4}e^{-\frac{128}{189}t}.$$

Ahora, si $x(t)$ es la posición instantánea, medida a partir del punto donde se abre el paracaídas,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{189}{4} - \frac{37}{4}e^{-\frac{128}{189}t},$$

Integrando $\int_0^x dx = \int_0^t \left[\frac{189}{4} - \frac{37}{4}e^{-\frac{128}{189}t}\right] dt$

$$x(t) = \frac{189}{4}t + \frac{6993}{512}\left(e^{-\frac{128}{189}t} - 1\right).\blacksquare$$

(b) La velocidad límite del paracaidista

$$v_{lim} = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{189}{4} - \frac{37}{4}e^{-\frac{128}{189}t}\right),$$

$$\approx 47{,}25\, pies/s.\blacksquare$$

Naturalmente, esta velocidad ocurre cuando el peso es igual a la fuerza de resistencia del aire.

Ejemplo 31. Un paracaidista junto con su paracaídas cae partiendo del reposo, el peso total es 100 kilogramos. Sobre el sistema actúa una fuerza debida a la resistencia del aire que es proporcional a la velocidad. Si la caída es vertical, obtener: a) la ecuación de movimiento, b) la ecuación cuando $k = 8$; c) la distancia recorrida por el paracaidista.

Solución. La fuerza neta es $F = mg - kv$, es decir $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$, ecuación que tiene como solución general

$$v(t) = \frac{mg}{k} - ce^{-\frac{k}{m}t}$$

a) Aplicando la condición inicial $v(0) = 0$ se obtiene $c = \frac{mg}{k}$, por tanto la ecuación del movimiento es $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - ce^{-\frac{k}{m}t})$. ■

b) Ahora siendo $w = mg = 100\,k$, $k = 8$, $g = 9{,}8\,m/s^2$, $m = \frac{100}{9{,}8}$, de manera que la ecuación queda

$$v(t) = \frac{25}{2}\left(1 - e^{-\frac{98}{125}t}\right),$$

de modo que la velocidad límite es $\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{25}{2}\ m/s$ es constante.

c) Como $v = \frac{dx}{dt}$ se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{25}{2}\left(1 - e^{-\frac{98}{125}t}\right)$$

separando variables e integrando según la condición inicial $x(0) = 0$

$$x(t) = \frac{25}{2}\left[t + \frac{125}{98}\left(e^{-\frac{98}{125}t} - 1\right)\right].\ ■$$

Ejemplo 32. Una partícula se mueve a lo largo del eje X, según la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 15x = 0.$$

A partir de un punto a 1 m a la derecha del origen, la partícula en el tiempo $t = 0$ segundos, se dispara hacia la izquierda con una velocidad $v = 10\,m/s$; determinar: a) el tiempo en que la partícula pasa por el origen; b) el desplazamiento máximo negativo; c) la velocidad máxima (positiva).

Solución. La ecuación diferencial tiene como ecuación auxiliar $\lambda^2 + 8\lambda + 15 = 0$ con raíces $\lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = -5$; con estas raíces la ecuación del desplazamiento es

$$x(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-5t}.$$

Siendo $x'(t) = v(t) = -3c_1e^{-3t} - 5c_2e^{-5t}$, aplicando las condiciones iniciales $x(0) = 1$ (es decir $t = 0, x = 1$); $v(0) = -10$ (es decir $t = 0, v = 10\,m/s$), se obtienen las constantes $c_1 = -\frac{5}{2}, c_2 = \frac{7}{2}$ y la solución al valor inicial, es

$$x(t) = -\frac{5}{2}e^{-3t} + \frac{7}{2}e^{-5t},$$

y $v(t) = x'(t) = \frac{15}{2}e^{-3t} - \frac{35}{2}e^{-5t}$.

a) Cuando la partícula pasa por el origen $x(t) = 0$ entonces

$$-\frac{5}{2}e^{-3t} + \frac{7}{2}e^{-5t} = 0,$$

de donde $t = \frac{1}{2} ln(7/5) = ln\left(\sqrt{7/5}\right) \approx 0{,}17$ segundos.

b) El desplazamiento negativo se dará cuando $v = 0$, es decir

$$\frac{15}{2} e^{-3t} - \frac{35}{2} e^{-5t},$$

de donde $t_1 = ln\left(\sqrt{7/3}\right)$, para este tiempo hallamos $x(t_1)$ y es

$$x(t_1) = -\frac{5}{2}(e^{t_1})^{-3} + \frac{7}{2}(e^{t_1})^{-5} = -\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^{-3} = -0{,}280\ m \blacksquare$$

c) La máxima velocidad se tendrá para $\frac{dv}{dt} = 0$, es decir

$$-\frac{45}{2} e^{-3t} + \frac{175}{2} e^{-5t} = 0,$$

de donde $t_1 = ln\left(\sqrt{\frac{35}{9}}\right)$ segundos, para este tiempo calculamos $v(t_1)$ y se obtiene

$$v(t_1) = 3\left(\sqrt{\frac{9}{35}}\right)^{3} \approx 0{,}391\ m/s \blacksquare$$

PROBLEMAS 6.7

1. Siendo g_0 (gravedad), r (radio medio de la luna) y v_0 (velocidad inicial) constantes, resolver la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2g_0 r\left(\frac{r}{x} - 1 + \frac{v_0^2}{2g_0 r}\right)}$ siendo $v_0 > 0$.
2. Un paracaidista de peso (masa) 80 kg se deja caer de un helicóptero que se mantiene a 6000 metros de altura. Asumiendo que cae bajo la influencia de una fuerza gravitacional constante y que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del paracaidista; siendo la constante de proporcionalidad de 10 kg/s cuando el paracaídas esta cerrado y 100 kg/s cuando el paracaídas está abierto. Si el paracaídas se abre 1 minuto después que el paracaidista abandona el helicóptero. Calcule el tiempo cuando llegará a la superficie.

   R. Aproximadamente 311,7 segundos**.**
3. Determinar el tiempo necesario para que un cuerpo caiga en la Tierra desde la altura de 400 000 kilómetros si la altura se mide desde el centro de la Tierra y sabiendo que su radio es 6 400 kilómetros aproximadamente.

   R. $y^2 \frac{d^2y}{dt^2} + k = 0$; $t = 122\ horas$**.**

4. Una pequeña gota de aceite de 0,2 g de masa cae en el aire desde el reposo. la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea y es de 160 dinas cuando la gota cae a 40 cm/s. Determine: a) la velocidad al cabo de t segundos, b) la posición después de t segundos; c) la velocidad límite de gota.
R. a) $v(t) = 40(1 - e^{-20t})\ cm/s;$ b) $x(t) = 49t + 2{,}45(e^{-20t} - 1)\ cm;$ c) 49 cm/s.
5. Un cuerpo que pesa 8 lb cae desde el reposo hacia la tierra. Asumiendo que la resistencia del aire es numéricamente igual a $2v(t)$, donde $v(t)$ es la velocidad instantánea en pies/s. Determinar: a) la velocidad después de t segundos; b) la distancia recorrida al cabo de t segundos; c) la velocidad límite del cuerpo.
R. a) $v(t) = 4(1 - e^{-8t}) pie/s;$ b) $x(t) = 4t + \frac{1}{2}(e^{-8t} - 1)\ pie;$ c) 4 pie/s.
6. Una piedra cae desde el reposo debido a la gravedad y con resistencia despreciable del aire. Determinar: a) la ecuación diferencial del movimiento de la piedra; b) velocidad de la piedra (en m/s); c) la posición (en metros) de la piedra en cualquier momento t; d) la velocidad de la piedra y la distancia recorrida al cabo de 5 s; e) el tiempo en que la piedra alcanza una velocidad de 100 m/s; f) la distancia recorrida al cabo de 6 y 8 segundos.
R. a) $v'(t) = g; v(0) = 0;$ b) $v(t) = 9{,}8t\ m/s;$ c) $x(t) = 4{,}9t^2\ m;$ d) $v(5) = 40\ m/s;$ $x(5) = 122{,}5\ m;$ e) $t = 10{,}2\ s;$ f) 137,2 m; 176,4 m.
7. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} + 13x = -4\frac{dx}{dt}$. La partícula empieza su movimiento en $x = 0$, con una velocidad inicial de 6 m/s hacia la izquierda; determine: a) $x(t)$; b) los tiempos en que se produce los descansos.
R. a) $x(t) = -2e^{-2t} sen(3t)$; b) $t = 0,33 + \frac{n\pi}{3}$ radios**.**
8. Un paracaidista y su paracaídas pesan 256 lb. En el instante en que el paracaídas se abre, él está cayendo verticalmente a 10 pies/s. Asumiendo que la resistencia del aire es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea y que ésa es de 400 lb cuando ésta es de 20 pies/s. Determine: a) la velocidad del paracaidista al cabo de t segundos; b) la posición del paracaidista al cabo de t segundos; c) la velocidad límite del paracaidista.
R. $v(t) = 16\left[\frac{13e^{4t}-3}{13e^{4t}+3}\right]\ pie/s;$ b) $x(t) = 4ln[(13e^{4t} + 3)(13 + 3e^{4t})] - 8\ln(16);$ c) 16 pie/s.

6.11 CABLE COLGANTE

Sea un cable o una cuerda que cuelga de dos puntos P y Q (ver figura), no necesariamente al mismo nivel. Asumiendo que el cable es flexible de modo que debido a su carga (su propio peso o fuerzas externas) se cuelga. Siendo B la porción más baja del cable. Sea $A(x, y)$ un punto arbitrario, la parte derecha del cable estará en equilibrio debido a la tensión T en A, la fuerza horizontal f en B, y la carga vertical total en el segmento BA del cable denotada por $w(x)$ que actúa en un punto C del arco BA. Si hay equilibrio entonces se cumple que la suma algebraica de la fuerza horizontal es cero, y la suma algebraica de fuerza en el eje vertical debe ser cero.

Se descompone la tensión T en dos componentes, la componente horizontal con magnitud $Tcos(\theta)$, y la componente vertical $Tsen(\theta)$. Las fuerzas en la dirección del eje y son w hacia abajo y $Tsen(\theta)$ hacia arriba, mientras que en la dirección del eje x son f hacia la izquierda y $Tcos(\theta)$ hacia la derecha, entonces

$$Tsen(\theta) - w = 0,\ Tcos(\theta) - f = 0$$

de donde $\frac{Tsen(\theta)}{Tcos(\theta)} = \frac{w}{f}$, es decir $\tan(\theta) = \frac{w}{f}$; pero, la pendiente de la recta tangente en el punto $A = (x, y)$ es $\frac{dy}{dx} = \tan(\theta)$, de esta forma se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{f}.$$

Es claro que f es constante al ser la tensión en el punto más bajo, sin embargo w podría depender de x, es decir $w = w(x)$, luego derivando

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{f}\frac{dw}{dx},$$

donde $\frac{dw}{dx}$ representa la rapidez de cambio en x, es decir, la carga por unidad de distancia en la dirección horizontal. Siendo esta una ecuación diferencial muy general, para resolver asumimos un cable con poco peso (despreciable que soporta un puente uniforme.

Análisis 1. Un cable de peso despreciable sostiene un puente uniforme. Obtener la forma que adopta el cable.

La ecuación diferencial de un cable suspendido es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{f}.\frac{dw}{dx},$$

donde f es la fuerza horizontal aplicada en el punto más bajo del cable y w es la carga vertical. En vista de que la carga es uniforme, entonces es constante $c = \frac{dw}{dx}$, de esta manera la ecuación diferencial ahora es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c}{f},$$

al ser una ecuación diferencial de segundo orden, al integrar dos veces la curva es,

$$y(x) = \frac{c}{2f}x^2 + c_1x + c_2.$$

Las condiciones iniciales es $y(0) = b$ que es la distancia del punto más bajo del cable al piso del puente; además $y'(0) = 0$, así será $c_1 = 0$ y $c_2 = b$, entonces

$$y(x) = \frac{c}{2f}x^2 + b\,,$$

lo cual es la ecuación de una familia de parábolas, es decir que el cable adopta la forma de parábola.

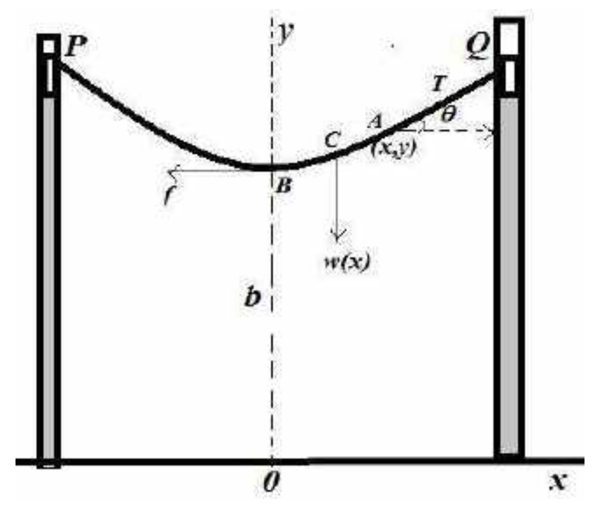


Figura 6.31: Cable colgante.

Análisis 2: Si w es la densidad lineal del cable (expresada por lb/ft) y S la longitud del segmento BA (desde el punto más bajo hasta A) su peso será wS,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wS}{f} \qquad \text{(a)}$$

dado que la longitud del arco entre los puntos B y A tiene la longitud

$$S = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{(b)}$$

por el teorema fundamental del cálculo $\frac{dS}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ entonces derivando en (a) resulta

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{f} \cdot \frac{dS}{dx} = \frac{w}{f}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Esta ecuación diferencial es no lineal y no es misma que se resolvió arriba, la solución se hace mediante la sustitución $u = y'$, entonces tenemos

$$\frac{du}{dx} = \frac{w}{f}\sqrt{1 + u^2},$$

ecuación separable con solución $senh^{-1}(u) = \frac{w}{f}x + c_1$, que al ser $y'(0) = 0$ equivale a $u(0) = 0$, esto da $c_1 = 0$, es decir $u(x) = senh(\frac{wx}{f})$, pero como $u = y'$ se vuelve a resolver $y' = senh(\frac{wx}{f})$ de donde

$$y(x) = \int senh\left(\frac{wx}{f}\right)dx + c_2$$

$$= \frac{f}{w}\cosh\left(\frac{wx}{f}\right) + c_2$$

pero como $y(0) = b$, $\cosh(0) = 1$, entonces $c_2 = b - \frac{f}{w}$, resulta

$$y(x) = \frac{f}{w}\cosh\left(\frac{wx}{f}\right) + b - \frac{f}{w}.$$

Finalmente si elegimos como $b = \frac{f}{w}$ resulta que tenemos la ecuación de una catenaria,

$$y(x) = \frac{f}{w}\cosh\left(\frac{wx}{f}\right).\blacksquare$$

PROBLEMAS 6.8

1. Una cuerda cuelga de dos extremos fijos. Determine la forma de la cuerda si su densidad es constante.
   R. $y(x) = \frac{h}{w}cosh\left(\frac{w}{h}x\right)$.
2. Una cadena colocada sobre un clavo grueso pende 1 metro de un lado y 2 metros del otro. Si la cadena está resbalando, obtener el tiempo que tarda en caerse si el rozamiento es despreciable.
   R. $y(x) = \frac{l}{2}\left[cosh\left(\sqrt{\frac{2g}{3}}t\right) - 1\right]$, $t = 0{,}69$ segundos.

6.12 MOVIMIENTO DE PLANETAS

Durante los siglos XVI-XVIII, el campo de la investigación más activo, fue el de astronomía. Copérnico con la teoría heliocéntrica, después de Galileo; los científicos se centraron en estudiar y deducir las órbitas planetarias. Sobre la base de los trabajos de Tycho Brahe y Kepler llegó a enunciar sus tres leyes fundamentales sobre movimiento de planetas.

Estas tres leyes son: 1) los planetas se mueven en órbitas elípticas ocupando el Sol uno de los focos de la elipse; 2) el área barrida por el radio vector de un planeta en tiempos iguales es igual; 3) el cuadrado del período de revolución es proporcional al cubo de los semiejes mayores de la elipse.

Hay que destacar que estas tres leyes son totalmente empíricas, Newton tuvo el mérito de obtenerlo estas tres leyes a partir de las leyes de la Mecánica y de la *Ley de Gravitación Universal*.

Se trata de deducir las leyes de Kepler de los movimientos planetarios, a partir de la ley de la gravitación de Newton y, con este fin, se estudia el movimiento de una pequeña partícula de masa m (un planeta) bajo la actuación de una partícula grande fija de masa M (el sol), para mayor simplicidad ubicamos el origen de coordenadas polares en el sol (M).

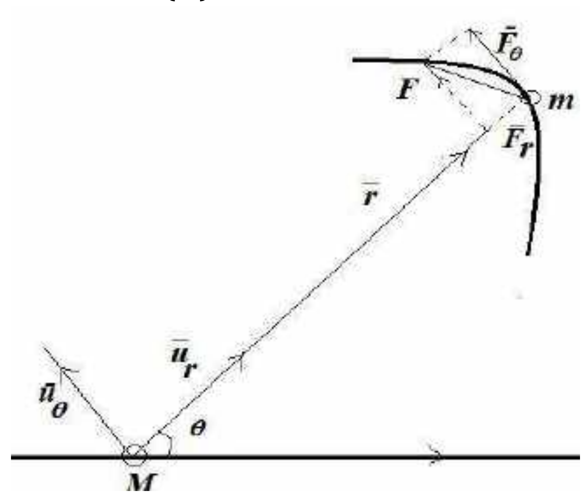


Figura 6.32: Movimiento planetario.

Denotamos por $\vec{u}_r = (\cos(\theta), sen(\theta))$ vector unitario radial; $\vec{u}_\theta = (-\text{sen}(\theta), cos(\theta))$ un vector unitario ortogonal a $\vec{u}_r$. Ahora, el vector posición de la masa m es

$$\vec{r} = r\vec{u}_r \text{ , } r = |\vec{u}_r|$$

derivando se obtiene

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta; \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r.$$

Si $\vec{F}$ es cualquier fuerza que actúa sobre el planeta m, por la segunda Ley de Newton se cumple $m\bar{a} = \vec{F}$. Por lo tanto se puede calcular la aceleración de la masa m, de

$$\vec{r} = r\vec{u}_r$$

$$\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt}$$

$$= r.\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt}$$

$$\bar{v} = r\frac{d\theta}{dt}.\vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\vec{u}_r \text{ ,}$$

y la aceleración $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ derivando se tiene

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}.\vec{u}_\theta\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{u}_r\right),$$

$$= r\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}.\vec{u}_\theta + \frac{d\theta}{dt}.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right) + \frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{d^2r}{dt^2}.\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}$$

$$= r\frac{d^2\theta}{dt^2}.\vec{u}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{d^2r}{dt^2}.\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{u}_\theta$$

donde $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$, luego

$$\bar{a} = \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_\theta + \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r \text{ ,}$$

ahora como, $\bar{F} = F_\theta\vec{u}_\theta + F_r\vec{u}_r$, entonces se tiene

$$m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_\theta + m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r = F_\theta\vec{u}_\theta + F_r\vec{u}_r$$

de donde resultan dos ecuaciones escalares

$$F_\theta = m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$F_r = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]. \qquad \text{(p)}$$

En consecuencia, estas ecuaciones diferenciales de segundo orden dadas en (p) representan el movimiento del planeta de masa m. Se puede estudiar casos particulares y también demostrar las tres leyes de Kepler.

i) Si $\bar{F}$ es una fuerza central, entonces $F_\theta = 0$, así la primera ecuación en (p) es

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}.\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

que multiplicando por r se obtiene $\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)=0$, de modo que $r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=h$ es constante; si $h>0$ significa que el planeta m se mueve en sentido antihorario. Denotando por $A(t)$ el área barrida por un radio central a partir de una posición fija de referencia se tiene

$$dA=\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{1}{2}hdt,\ A(t)=\frac{1}{2}ht,$$

de esta forma $A(t_2)-A(t_1)=\frac{1}{2}h(t_2-t_1)$ lo cual prueba la *segunda ley Kepler*.

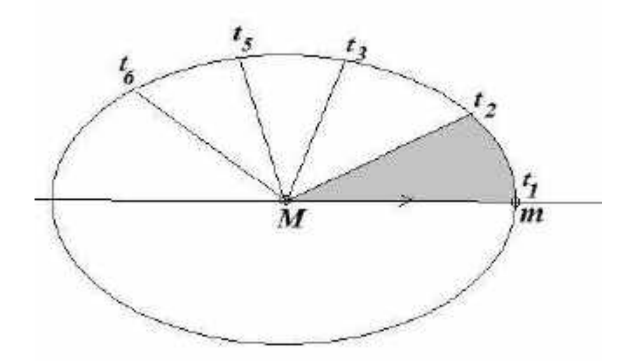


Figura 6.33: Movimiento planetario.

ii) Si $\bar{F}=\bar{F}_r$ es una fuerza gravitacional central. Por la segunda Ley de gravitación de Newton, $F_r=-\frac{GMm}{r^2}$, llevando a la segunda ecuación en (p) se tiene

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=-\frac{GMm}{r^2}$$

donde G es la constante gravitacional y es universal.

De $\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{GM}{r^2}$ si $k=GM$ ya se puede resolver la ecuación

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{k}{r^2} \qquad (p_1)$$

hacienda el cambio de variable $z=\frac{1}{r}$ resulta

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{z^2}.\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{z^2}.\frac{dz}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}, \text{ con } r^2\frac{d\theta}{dt}=h$$

$$=-\frac{1}{z^2}.\frac{dz}{d\theta}.\frac{h}{r^2}=-h\frac{dz}{d\theta}$$

$$\frac{dr}{dt}=-h\frac{dz}{d\theta},$$

derivando

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-h\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)=-h\frac{d^2z}{d\theta^2}.\frac{d\theta}{dt},\ \frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{r^2}$$

$$= -h^2 z^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2},$$

reemplazando en la ecuación original (p_1) resulta

$$-h^2 z^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2} - r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2 = -\frac{k}{r^2},$$

$$-h^2 z^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2} - \frac{h^2 z^4}{z} = -kz^2$$

$$-h^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2} - h^2 z = -k,$$

es decir, una ecuación diferencial

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}$$

que tiene como solución general

$$z(\theta) = c_1 sen(\theta) + c_2 \cos(\theta) + \frac{k}{h^2}$$

arreglado al eje polar de manera que r sea el mínimo cuando $\theta = 0$, es decir $z = \frac{1}{r}$ será máxima en esa dirección. Luego,

$$\left.\frac{dz}{d\theta}\right|_{\theta} = 0\,;\ \left.\frac{d^2 z}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} < 0,$$

entonces cuando $z'(0) = 0$ en la función $z'(\theta) = c_1 \cos(\theta) - c_2 sen(\theta)$ resulta $c_1 = 0$, por tanto, $z(\theta) = c_2 \cos(\theta) + \frac{k}{h^2}$ donde la segunda condición afirma que $c_2 > 0$, de esta forma

$$r = \frac{\frac{h^2}{k}}{1+\left(\frac{c_2 h^2}{k}\right)\cos(\theta)},$$

llamando $e = \frac{c_2 h^2}{k}$ se tiene

$$r(\theta) = \frac{c_2^{-1} e}{1+e\cos(\theta)},$$

y es la ecuación de una cónica en coordenadas polares. Se puede describir según su excentricidad e; precisamente, si $e < 1, r(\theta)$ es una elipse; $e = 1, r(\theta)$ son parábolas; $e > 1$, $r(\theta)$ son hipérbolas. Así queda demostrada la *primera Ley de Kepler*.

iii) Período de los planetas. Supongamos que el planeta m tiene órbita elíptica cuya ecuación es $\frac{x}{a^2}^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sabemos que la excentricidad e se define por la relación $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, de donde $b^2 = a^2(1-e^2)$, pero

$$a = c + r(0) = c + \frac{h^2/k}{1+e} = ae + \frac{h^2/k}{1+e}$$

de donde

$$a = \frac{h^2}{k(1-e^2)}\,, b^2 = \frac{h^4}{k^2(1-e^2)} = \frac{h^2 a}{k}\ .$$

Denotando por T el período del planeta m, entorno del sol M, entonces de la segunda Ley de Kepler $\pi ab = \frac{1}{2}hT$, es decir $T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2}$ cuando asocia apropiadamente se puede ver

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{h^2}.\,a^2\left(\frac{h^2 a}{k}\right) = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)a^3\,,$$

esto prueba la *tercera Ley de Kepler*.

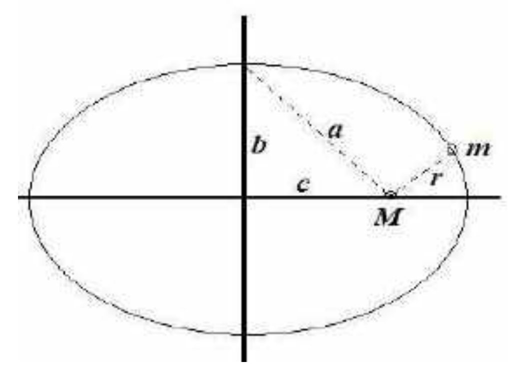


Figura 6.34: Elipse con foco en M (sol).

Cabe destacar que la distancia media a del planeta m al foco M es la semisuma del menor valor de r y el mayor valor de r, es decir

$$a = \frac{1}{2}(r(0) + r(\pi)) = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2/k}{1+e} + \frac{h^2/k}{1-e}\right)$$

$$= \frac{h^2}{k(1-e^2)}.$$

Por otro lado la energía total del sistema es $E = V + U$, donde

$$V = \frac{1}{2}m\left[r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$ es la energía cinética

$$U = \int_r^\infty F_r dr = -\int_r^\infty \frac{km}{r^2}dr = -\frac{km}{r}$$ es la energía potencial

de modo que

$$E(\theta) = \frac{1}{m}\left[(r(\theta))^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr(\theta)}{dt}\right)^2\right] - \frac{km}{r(\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}m\left[r^2(\theta).\frac{h^2}{r^4(\theta)} + \left(-h\frac{dz}{d\theta}\right)^2\right] - \frac{km}{r(\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\frac{h^2}{r^2(\theta)} + h^2\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2\right] - \frac{km}{r(\theta)}.$$

El principio de conservación de la energía nos dice que $E(\theta)$ es constante en consecuencia $E = E(0)$, es decir

$$E = \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} - \frac{km}{r}, r = r(0) = \frac{h^2/k}{1+e},$$

eliminando r se obtiene

$$e = \sqrt{1 + E\left(\frac{2h^2}{mk^2}\right)},$$

de donde $r(\theta)$ será una elipse si $E < 0$; $r(\theta)$ será una parábola si $E = 0$ y finalmente $r(\theta)$ será una hipérbola si $E > 0$.■

PROBLEMAS 6.9

1. Demuestre que las leyes de Kepler, implican que m es atraída hacia el sol con una fuerza cuya magnitud es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre m y el sol (este fue el descubrimiento fundamental de Newton, porque a partir de él propuso su ley de la gravedad e investigó sus consecuencia).
2. Demuestre que la velocidad V de un planeta en cualquier punto de su órbita está dada (en módulo) por $v^2 = k\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$.

6.13 MOVIMIENTO DE UN COHETE

La ecuación diferencial de un cuerpo en caída libre de masa m muy cerca a la superficie de la Tierra, está dado por

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\ ,$$

o simplemente $\frac{d^2s}{dt^2} = -g$, donde s representa la distancia de la superficie terrestre al objeto, siendo la dirección positiva hacia arriba. Aquí se destaca que la distancia que recorre el objeto es pequeña comparado con el radio R de la Tierra, para entender; la distancia y del centro de la Tierra al objeto es aproximadamente igual a R.

Pero, si ocurre la distancia y a un objeto como una sonda espacial o un cohete es grande en comparación de R. cuando esta distancia es grande, se puede combinar la segunda ley del movimiento de Newton con la ley de gravitación universal (de Newton), para deducir una ecuación diferencial en la variable y.

Supongamos que se dispara un cohete en dirección vertical desde la superficie terrestre. Considerando positiva hacia arriba y descarta la resistencia del aire, la ecuación diferencial del movimiento después de quemar el combustible, es

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{Mm}{y^2}$$

es decir

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{M}{y^2} \qquad \text{(r)}$$

donde k es una constante de proporcionalidad, mientras que y es la distancia del centro de la Tierra al cohete, M es la masa de la Tierra y m es la masa del cohete.

Para obtener la constante k, aprovechamos que $y = R$, con $mg = k\frac{Mm}{R^2}$ entonces $k = \frac{gR^2}{M}$, luego la ecuación queda

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{R^2}{y^2}, \qquad \text{(b)}$$

pero como $v = \frac{dy}{dt}$ es la velocidad la ecuación (b) se escribe

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}.\frac{dy}{dt} = v.\frac{dv}{dy}$$

$$v.\frac{dv}{dy} = -g\frac{R^2}{y^2} \ ,$$

al ser variable separable, integrando resulta $\frac{v^2}{2} = g\frac{R^2}{y} + c$. Para la condición inicial, si suponemos que la velocidad del cohete es $v = v_0$ cuando acaba el combustible y que $y \approx R$ $(v(R) = v_0$ en ese momento, entonces hallamos el valor de $= \frac{v_0^2}{2} - gR$, por tanto,

$$v^2 = 2g\frac{R^2}{y} + v_0^2 - 2gR, \qquad \text{(c)}$$

es la ecuación que se puede emplear para determinar la velocidad mínima, necesaria para que un cohete salga de la atracción gravitatoria terrestre.■

VELOCIDAD DE ESCAPE

Si lanzamos una piedra al aire esta volverá a caer debido a la fuerza gravitatoria de la Tierra. ¿Existe alguna velocidad a la que la piedra ya no volverá? De esta

interrogante nos ocuparemos precisamente. Para que un proyectil abandone la Tierra, este debe vencer la fuerza de gravedad. La velocidad de escape depende de la forma del potencial gravitatorio en el que se encuentra el proyectil, por lo que el planteamiento sería ligeramente distinto si el punto de partida está en el interior o en exterior del astro.

A velocidades inferiores a la del escape, el proyectil se convertiría en un satélite artificial en órbita elíptica alrededor del astro que lo atraiga; mientras que, para velocidades superiores a la de escape, se alejaría definitivamente de la Tierra o astro desde que se lanzó.

La fórmula para calcularla, se puede deducir a partir de la última ecuación arriba (c), o también por otro método, como están relacionadas con la energía cinética y energía potencial, se tiene $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, $E_p = -G\frac{Mm}{R}$, luego el principio de *conservación de energía*, al imponemos la condición de que el objeto se aleje hasta una distancia infinita y quede en reposo, significa que

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{R} = 0\,,$$

y se obtiene la velocidad de escape

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR},$$

donde, M es la masa del astro; m es la masa del proyectil, G es la constante de gravitación universal; R es el radio del astro; g es la intensidad del campo gravitatorio en la superficie del astro.

Ejemplo 33. Determine la velocidad de escape de una nave de masa $m = 1400$ kg lanzado desde la superficie terrestre.

Solución. Conocemos los siguientes datos: radio de la Tierra $R = 6{,}37x10^6 km = 6370x10^3\ m$; masa de la Tierra $M = 5{,}98x10^{24}$ kg; constante de gravitación universal $G = 6{,}672x10^{-11}\ N.m^2/kg^2$, reemplazando todo estos datos en la fórmula

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2x6{,}672x10^{-11}x5{,}98x10^{24}}{6370x10^3}}$$

$$= 11172{,}01 m/s \approx 11{,}2 km/s\,.$$

Así, resulta que para nuestro planeta la velocidad de escape es de 11,2 km/s, y que este cálculo no interviene la masa de la nave. ■

PROBLEMAS 6.10

1. Demuestre que la velocidad de escape del cohete es $v_0 = \sqrt{2gR}$.
2. Determine la velocidad de escape en la Tierra.
3. Calcule la velocidad de escape en la Luna, siendo $g = 0{,}165$ y $R = 1080\ mi$.
4. Determine la velocidad de escape del Sol.
5. Halle la velocidad de escape de Marte.

6.14 CIRCUITO ELÉCTRICOS SIMPLES

Uno de los procesos físicos importantes que puede modelarse mediante ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden es el flujo de energía eléctrica en un circuito. Las dos medidas básicas de flujo de energía en un circuito son la corriente y el voltaje. Las leyes de Newton, permiten asociar relaciones entre fuerzas que afectan a un sistema mecánico. Similarmente, las leyes de Kirchhoff (1824-1887) permiten asociar relaciones entre los elementos que proveen y usan energía en un circuito eléctrico. Un circuito es un dispositivo que permite la circulación de un campo eléctrico; y un campo eléctrico es el campo de fuerzas vinculado a una carga eléctrica; mientras que la carga eléctrica, son de dos tipos: positiva y negativa. El principio general señala que cargas iguales se atraen y cargas opuestas se repelen (Boyce, 2005).

Existe una similitud entre un circuito eléctrico y un sistema mecánico, esta comparación es como se explica en la siguiente tabla.

Circuito eléctrico	Sistema mecánico
$L\dfrac{d^2q}{dt^2} = -R\dfrac{dq}{dt} - \dfrac{1}{C}q + E(t)$	$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\dfrac{dx}{dt} + F(t)$
Carga: q (culombios)	Desplazamiento: x
Corriente: $I = \frac{dq}{dt}$ (amperios)	Velocidad: $v = \frac{dx}{dt}$
Inductancia: L (henrios)	Masa: m
Resistencia: R (ohmios)	Amortiguamiento: b
Capacitancia: C (faradios)	Constante del resorte: k
Voltaje aplicado, fem, $E(t)$ (voltios)	Fuerza externa: $F(t)$

Se utiliza los nombres de mucho de los primeros investigadores en electricidad para las unidades eléctricas. Se tiene: *Ohms* (George Simon Ohm, 1787-1854), físico alemán; *henries* (Joseph Henry, 1797-1878), físico estadounidense; *farads* (Michael Faraday, 1791-1867), científico inglés; *volts* (Alessandro Volta, 1745-1827), físico italiano; *Couloms* (Charles Augusto de Coulomb, 1736-1806) físico francés. Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), físico alemán que estudió las propiedades de los primeros circuitos eléctricos. Andre Maric Ampére (1775-1836), matemático francés y filósofo, se le reconoce por su aporte a la electrodinámica.

En un circuito eléctrico se reconocen elementos activos y pasivos, los activos son: pila, batería, motores eléctricos, los pasivos: resistores, inductores y capacitores. El estudio de un circuito eléctrico está formado por un resistor y un capacitor, donde se aplica cierta fuerza electromotriz.

Consideremos un circuito eléctrico elemental que consta de una fuerza electromotriz (batería o generador), una resistencia, una bobina y un condensador en serie. Estos circuitos se rigen por dos principios físicos: la conservación de la carga eléctrica y la conservación de la energía (figura 6.35). Las leyes que formulan estos principios son las leyes de Kirchhoff que establecen:

i) La corriente I que pasa a través de cada elemento de un circuito en serie debe ser la misma.
ii) La suma algebraica de los cambios instantáneos de potencial (caída de voltaje) en un circuito cerrado debe ser cero.

En cada elemento la caída de voltaje es la siguiente:

a) Según la ley de Ohm, la caída de voltaje en una resistencia es proporcional a la corriente I que pasa por ella, es decir, $E_R = RI$, donde R es la *resistencia*.
b) Según las leyes de Faraday y Lenz, la caída de voltaje en una resistencia es proporcional a la razón de cambio instantánea de la corriente I que pasa por ella, es decir, $E_L = L\frac{dI}{dt}$, donde L es la *inductancia*.
c) La caída de voltaje en un condensador es proporcional a la carga eléctrica q del condensador, es decir; $E_C = \frac{1}{C}q$ donde C es la *capacitancia* y $\frac{1}{C}$ es la *elastancia*.

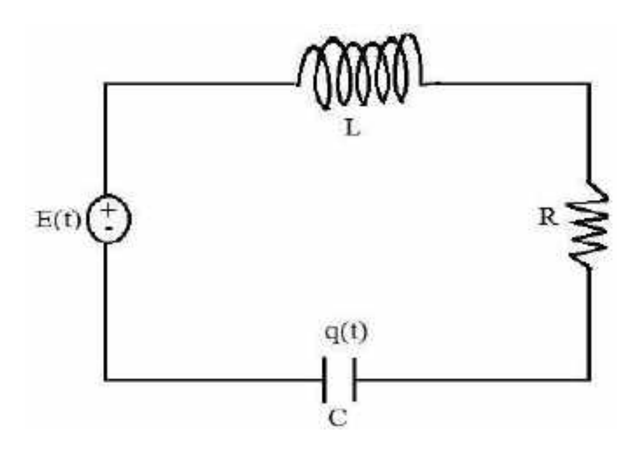


Figura 6.35: Circuito LRC en serie**.**

Se sabe que la carga y la corriente están relacionado por $I=\frac{dq}{dt}$. Aplicaremos esta teoría para determinar la carga $q(t)$ y $I(t)$ en un circuito en el que se conectan un inductor o bobina de L henrios, una resistencia de R ohmios, un condensador o capacitor de C faradios y un generador de voltaje cuya fuerza electromotriz está dada por la función $E(t)$ voltios, según la segunda ley de Kirchhoff se tiene

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}q=E(t)\,,$$

pero como

$$I=\frac{dq}{dt}\,,\ \frac{dI}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}\,,$$

resulta la ecuación diferencial de segundo orden para calcular la carga eléctrica en el condensador

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t), \qquad (1)$$

si es un problema con valor inicial se toma $q(0)=q_0$ y $I(0)=I_0$.

Se puede observar que si de la ecuación

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}q=E(t)$$

derivamos en ambos miembros respecto a t, se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden de la corriente eléctrica

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dE(t)}{dt}\,. \qquad (2)$$

Ejemplo 34. Un circuito en serie consta de un inductor de 0,25 H, una resistencia de 40 Ω, capacitor de $4x10^{-4}\,F$ y una fuerza electromotriz dada por $E(t)=5sen(100t)\ V$. Si la corriente inicial y la carga inicial en el capacitor son ambas

cero, obtener la carga en el capacitor y la corriente eléctrica del circuito para cualquier tiempo t positivo.

Solución. Reemplazamos los datos: $L = 0{,}25\,H$, $R = 40\,\Omega$, $C = 4x10^{-4}\,F$ y $E(t) = 5sen(100t)\,V$ en la ecuación diferencial (1) resulta

$$0{,}25\frac{d^2q}{dt^2} + 40\frac{dq}{dt} + \frac{10^4}{4}q = 5sen(100t)\,,$$

es decir,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 160\frac{dq}{dt} + 10000q = 20sen(100t),$$

al ser una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, la solución de la parte homogénea es

$$q_h(t) = (c_1\cos(60t) + c_2sen(60t)e^{-80t}.$$

Para encontrar la solución particular $q_p(t)$, usamos el método de los coeficientes indeterminados, y es

$$q_p(t) = -\frac{1}{800}\cos(100t),$$

de manera que la solución general para la carga resulta

$$q(t) = (c_1\cos(60t) + c_2sen(60t)e^{-80t} - \frac{1}{800}\cos(100t),$$

en seguida aplicamos las condiciones iniciales $q(0) = 0$ y $q'(0) = 0$ para encontrar las constantes arbitrarias

$$c_1 = 800^{-1} \text{ y } c_2 = 600^{-1}\,,$$

por lo tanto, la ecuación de la carga en el capacitor es

$$q(t) = \left(\frac{1}{800}\cos(60t) + \frac{1}{600}sen(60t\right)e^{-80t} - \frac{1}{800}\cos(100t).$$

Por lado para hallar la corriente eléctrica se aplica $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ que luego de derivar y simplificar se obtiene

$$I(t) = -\frac{5}{24}e^{-80t}sen(60t) + \frac{1}{8}\text{sen}(100t)\,.\blacksquare$$

Ejemplo 35. Un circuito en serie consta de un inductor de 0,5 H, una resistencia de 10 Ω, capacitor de $10^{-2}\,F$ y una fuerza electromotriz dada por $E(t) = 12$ voltios. Si la corriente inicial y la carga inicial en el capacitor son ambas cero, obtener la carga en el capacitor y la corriente eléctrica del circuito para cualquier tiempo t positivo; la corriente al cabo de $\frac{\pi}{40}$ segundos.

Solución. Reemplazamos los datos: $L = 0{,}25\,H$, $R = 10\,\Omega$, $C = 10^{-2}\,F$ y $E(t) = 12\,V$ en la ecuación diferencial (1) resulta

$$0{,}5\frac{d^2q}{dt^2} + 10\frac{dq}{dt} + 10^2q = 12\,,$$

es decir,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + 200q = 24,$$

al ser una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, la solución de la parte homogénea es

$$q_h(t) = (c_1 \cos(10t) + c_2 sen(10t)e^{-10t}.$$

Para encontrar la solución particular $q_p(t)$, usamos el método de los coeficientes indeterminados, y es

$$q_p(t) = \frac{3}{25},$$

de manera que la solución general para la carga resulta

$$q(t) = (c_1 \cos(10t) + c_2 sen(10t)e^{-10t} + \frac{3}{25},$$

en seguida aplicamos las condiciones iniciales $q(0) = 0$ y $q'(0) = 0$ (pues $I(0) = 0$) para encontrar las constantes arbitrarias

$$c_1 = -\frac{3}{25} \text{ y } c_2 = -\frac{3}{25},$$

por lo tanto, la ecuación de la carga en el capacitor es

$$q(t) = \left(\frac{-3}{25}\cos(10t) - \frac{3}{25}sen(10t\right)e^{-10t} + \frac{3}{25}. \blacksquare$$

Por otro lado para hallar la corriente eléctrica se aplica $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ que luego de derivar y simplificar se obtiene

$$I(t) = \frac{12}{5}e^{-10t}sen(10t).\blacksquare$$

Mientras que, cuando $t = \frac{\pi}{40}$ la corriente es

$$I\left(\frac{\pi}{40}\right) = \frac{12}{5}e^{-10\left(\frac{\pi}{40}\right)}sen(10\pi/40) = \frac{6\sqrt{2}}{5}e^{-\frac{\pi}{4}}.\blacksquare$$

Ejemplo 36. Un circuito tiene una fuerza electromotriz $10e^{-2t}$ voltios, una resistencia de 10 ohmios y una capacitancia de 0,02 faradios. Si $q(0) = 0$, obtener: a) la carga y la intensidad de la corriente en cualquier instante t; b) la carga máxima y el tiempo necesario para obtener la carga máxima.

Solución. Tenemos caída en el condensador $\frac{q}{C} = \frac{q}{0{,}02} = 50q$; caída de voltaje en la resistencia $IR = 10I$, voltaje $E = 10e^{-2t}$.

a) Por la segunda ley de Kirchhoff se tiene $10I + 50q = 10e^{-2t}$, pero como $I = \frac{dq}{dt}$, entonces la ecuación queda así $10.\frac{dq}{dt} + 50q = 10e^{-2t}$, es decir

$$\frac{dq}{dt} + 5q = e^{-2t} \text{ con } q(0) = 0,$$

ecuación lineal que tiene como solución al problema de valor inicial y es la carga

$$q(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t}.$$

La intensidad de la corriente es $I = \frac{dq}{dt}$, es decir $I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-5t}$. ■

b) La carga máxima ocurre cuando $\frac{dq}{dt} = 0$, es decir $-\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-5t} = 0$ de donde

$$t = \frac{\ln(\frac{5}{2})}{3} \approx 0{,}31 \text{ segundos},$$

para este tiempo la carga es $q(0{,}31) = 0{,}11$ culombios. ■

Ejemplo 37. Un circuito RLC en serie tiene una *fem* dada por $sen(100t)$ voltios, un resistor de 0,02 ohmios, un inductor de 0,001 henrios y un capacitor de 2 faradios. Si la corriente inicial y la carga inicial son ceros. Obtener la corriente del circuito cuando t es positivo.

Solución. Se tiene los datos: inductancia $L = 0{,}001$ henrios; capacitancia $C = 2$ faradios, resistencia $R = 0{,}02$ ohmios; fuerza electromotriz $E(t) = sen(100t)$ voltios, y dado que la ecuación es de la forma

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE(t)}{dt},$$

se tiene la ecuación diferencial

$$0{,}001\frac{d^2I}{dt^2} + 0{,}02\frac{dI}{dt} + 0{,}5I = 100\cos(100t)$$

O bien

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 500I = 100000\cos(100t)$$

tiene como solución general

$$I(t) = e^{-10t}[c_1\cos(20t) + c_2 sen(20t)] + \frac{800}{377}sen(100t) - \frac{3800}{377}\cos(100t) \quad \text{(b)}$$

además cumplen las condiciones iniciales $I(0) = 0, q(0) = 0$, como $I = \frac{dq}{dt}$, $I(0) = q'(0)$, pero como

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t),$$

es decir, aquí aplicamos la condición iniciales

$$0{,}001I'(0) + 0{,}02I(0) + 0{,}5q(0) = sen(0)$$

de aquí resulta que $I'(0) = 0$.

En la ecuación (b) aplicamos $I(0) = 0$ se obtiene $c_1 = \frac{3800}{377}$, mientras que para $I'(O) = 0$ resulta $c_2 = -\frac{2100}{377}$. Finalmente, la solución con valor inicial, es

$$I(t) = e^{-10t}\left[\frac{3800}{377}\cos(20t) - \frac{2100}{377}sen(20t)\right] + \frac{800}{377}sen(100t) - \frac{3800}{377}\cos(100t).\blacksquare$$

PROBLEMAS 6.11

1. Se tiene un circuito como se muestra en la figura. Determinar: a) la ecuación diferencial de la carga en un tiempo t; b) la carga y la intensidad de la corriente en t, si el interruptor en $t = 0$, la carga es nula.

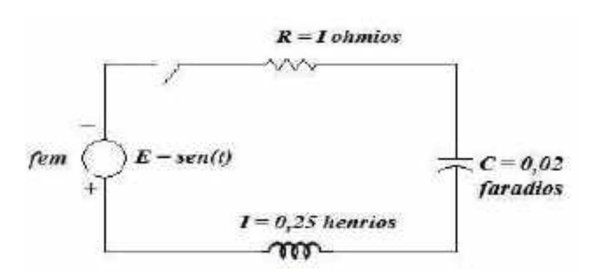


Figura 6.36: circuito RC.

R. $q(t) = e^{-2t}\left[\frac{160}{377}\cos(4t) - \frac{110}{377}sen(4t)\right] + \frac{760}{377}sen(t) - \frac{160}{377}\cos(t)$;

$I(t) = e^{-2t}\left[-\frac{760}{377}\cos(4t) - \frac{420}{377}sen(4t)\right] + \frac{760}{377}\cos(t) + \frac{160}{377}sen(t)$.

2. Un condensador de capacitancia $\frac{1}{52}$ faradios con una carga de 0,05 culombios está conectado en series con una bobina de inductancia 2 henrios y una resistencia de 28 ohmios, y descarga enviando una corriente por el circuito. Si la corriente es inicialmente cero; obtener la carga y la corriente, ¿Cuánto es la corriente al cabo de $1/10$ segundos?

   R. $I = 1{,}22$ amperios; $q = 0{,}00245$ culombios.
3. Se conecta un circuito en serie con un inductor de 0,5 H, una resistencia de 6 Ω, un condensador de 0,02 F y una fuente de voltaje alterno dado por $24sen(10t)$. Si inicialmente la carga en el condensador y la corriente en el circuito son cero; determinar la carga y la corriente en el tiempo t.
4. Un circuito de una bobina, cuya inductancia es L y resistencia despreciable conectada en serie con un condensador de capacitancia C y una fuerza electromotriz $120sen(250t)$ voltios. Suponiendo que la carga en el condensador y la corriente en el circuito son cero cuanto $t = 0$; y $L = 2$

henrios y $C = \frac{2}{10^6}$ faradios, encontrar la corriente para 0,01 segundos; los valores entre las cuales varía la corriente.

R. $\frac{2}{25}[\cos(2{,}5) - \cos(5)]$ amperios; $-\frac{9}{25}$ y $\frac{9}{100}$ amperios, magnitud máxima $\frac{4}{25}$ amperios.

5. Un circuito consta de una inductancia de o,2 henrios, una resistencia de 4 ohmios y un condensador 0,0,1 faradios. Determinar la corriente y la carga en el tiempo t, si $q(0) = 0{,}5$ culombios; $I(0) = -1$ amperios.

   R. $q(t) = e^{-10t}\left[\frac{1}{2}\cos(20t) + \frac{1}{5}sen(20t)\right]$, $I(t) = e^{-10t}[-12sen(20t) - \cos(20t)]$.
6. Un circuito consta de una inductancia de 0,5 henrios, una resistencia de 20 ohmios, un condensador cuya capacidad es 0,0025 faradios y una fem 100 voltios. Determine la carga y la corriente, sabiendo que $q(0) = 0$, $I(0) = 0$.

   R. $q(t) = \frac{1}{4}e^{-20t}[-\cos(20t) - sen(20t)] + 0{,}25$; $I(t) = 10e^{-20t}sen(20t)$.
7. Resuelve el problema 6, sabiendo que la *fem* es $E = 10sen(10t)$.

6.15 APLICACIÓN A LA ECONOMÍA

Planteamos problemas basados en la oferta y la demanda, además, el modelo estudiado por F. Dresch y el modelo tratado por Phillips (Sydsaeter, 1996).

Problema 1. Tenemos un mercado en el que la demanda y la oferta están influenciadas por los precios corrientes y las tendencias de esos precios, que se manifiestan no sólo cuando esos precios aumentan o disminuyen sino cuando conocemos como aumentan o disminuyen en unos determinado ratios. Asumimos que: La oferta de un bien es $S = -5 + 10P - 3P' + 6P''$; la demanda $D = 5p'' - 11p' - 5p + 1$. Calcular la trayectoria temporal del precio y el precio de equilibrio.

Solución. Cuando hay equilibrio la oferta es igual que la demanda $S = D$, es decir

$$-5 + 10P - 3P' + 6P'' = 5p'' - 11p' - 5p + 1,$$

una ecuación de segundo orden $p'' + 8p' + 15p = 6$, donde la solución a la parte homogénea es

$$p_h(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-5t},$$

aplicando el método de coeficientes indeterminados se asume como solución particular $p_p(t) = A$, donde $A = \frac{2}{5}$; es decir $\lim_{t\to+\infty} p(t) = p_e(t) = \frac{2}{5}$ es el *precio de equilibrio*, luego la solución general es

$$p(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-5t} + \frac{2}{5}. \blacksquare$$

EL MODELO DE: F. DRESCH

Problema 2. El modelo que se debe a F. Dresch (Sydsaeter, 1996), señala que la tasa de aumentos de precios es proporcional al total acumulado de todos los excesos de demandas pasados. El modelo es

$$p'(t) = c\int_{-\infty}^{t}[D(p(z)) - S(p(z))]\,dz \text{ con } c > 0.$$

Si consideramos $c = 5$, $D(p(t)) = -3p + 6$, $S(p(t)) = 5p + 8$. Con estos datos obtener la ecuación diferencial de segundo orden y la solución general.

Solución sustituyendo los datos se tiene

$$p'(t) = 5\int_{-\infty}^{t}[6 - 3p - 5p - 8]\,dz$$

que aplicando teorema fundamental del cálculo se reduce a

$$p''(t) = 5(-8p(t) - 2),$$

como la ecuación es $p'' + 40p = -10$, es ya conocido al resolver tiene como solución general

$$p(t) = c_1 cos\left(2\sqrt{10}t\right) + c_2 sen\left(2\sqrt{10}t\right) - \frac{1}{4}. \blacksquare$$

MODELO DE PHILLIPS

Problema 3. En el modelo de Phillips (Chiang, 2006); con base empírica, se da una relación entre la tasa de crecimiento del salario en dinero y la tasa de desempleo. Esto, en un mercado de trabajo.

$$\frac{s\prime}{s} = f(z) = a - bz \text{ con } f'(z) \leq 0\,, \qquad (1)$$

donde s represntan los salarios y z la tasa de desempleo, para este problema se ha considerado lineal con a y b positivos.

Resulta que si $\frac{s\prime}{s} > 0$ esto indica que el costo creciente del salario monetario nos lleva a una situación inflacionaria, entonces también señala que la tasa de inflación será una función de z.

Pero, comportamiento de la presión inflacionaria puede ser comparada por un aumento de productividad laboral, que se asume exógena y se denota por Q. Entonces, denotando por $\frac{P'}{P}$ como la tasa de inflación (tasa de crecimiento de precios) se escribe

$$\frac{P'}{P} = \frac{s\prime}{s} - Q \qquad (2)$$

cambiando las fórmulas (1) y (2) se obtiene

$$\frac{P'}{P} = a - bz - Q\,. \qquad (3)$$

Sostiene Friedman que, si una tendencia inflacionaria ha estado en actividad por bastante tiempo, las personas tienden a formar ciertas expectativas de inflación que más tarde intentan a incorporar a sus demandas de salario monetario. Estudiemos el modelo

$$\frac{S'}{S} = f(z) + ux \text{ con } 0 \leq u \leq 1\,,$$

donde x es la tasa esperada de inflación lo cual si agregamos en (3) resulta

$$\frac{P'}{P} = a - bz - Q + ux \;\text{ con } 0 \leq u \leq 1\,. \qquad (4)$$

Una fórmula que nos da las expectativas aumentadas de Phillips. Ahora como se ha introducido una nueva variable para denotar la tasa de inflación, entonces es necesario formular una hipótesis de cómo se forman dichas expectativas. Para obtener éxito, hay que buscar una función que nos describa el patrón de x conforme pase el tiempo en el caso de que la tasa de crecimiento de los precios (tasa de inflación real) está relacionada con la tasa esperada x,

$$\frac{dx}{dt} = v\left(\frac{P'}{P} - x\right) \;\text{ con } 0 \leq v \leq 1. \qquad (5)$$

Fórmula que nos da las expectativas adaptativas de Phillips, lo señala esta fórmula que es la discrepancia entre la inflación real y la esperada. La ecuación (4) y (5) tiene tres variables, esto sugiere encontrar otra ecuación que explique mejor la variable z. Entonces es precisos formular varias precisiones.

Consideremos una política monetaria, como la ecuación

$$\frac{dz}{dt} = -k\left(\frac{M'}{M} - \frac{P'}{P}\right) \;\text{ con } k > 0\,, \qquad (6)$$

aquí $\frac{M'}{M} - \frac{P'}{P}$ nos da el crecimiento de dinero real y $\frac{M'}{M}$ es la tasa de crecimiento de la masa monetaria. Buscamos la trayectoria temporal de x, partimos de las siguientes ecuaciones:

(i) Expectativas aumentadas de Philips

$$\frac{P'}{P} = a - bz - Q + ux \;\text{ con } 0 \leq u \leq 1.$$

(ii) Expectativas adaptativas de Phillips

$$\frac{dx}{dt} = v\left(\frac{P'}{P} - x\right) \text{ con } 0 \leq v \leq 1.$$

(iii) Políticas monetarias

$$\frac{dz}{dt} = -k\left(\frac{M'}{M} - \frac{P'}{P}\right) \;\text{ con } k > 0.$$

Sustituyendo (3) en (5) obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = v\left(\frac{P'}{P} - x\right) = v(a - bz - Q) - v(1 - u)x\,, \quad (*)$$

derivando resulta

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -vb\frac{dz}{dt} - v(1-u)\frac{dx}{dt},$$

reemplazando (iii), se obtiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = vbk\left(\frac{M\prime}{M} - \frac{P\prime}{P}\right) - v(1-u)\frac{dx}{dt},$$

por otro lado, sabemos que partiendo de (5)

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{v}\frac{dx}{dt} + x$$

sustituyendo en (*) y ordenando

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [bk + v(1-u)]\frac{dx}{dt} + vbkx = vbk\frac{M\prime}{M}. \qquad (7)$$

Esta es la ecuación diferencial de segundo orden que resulta y que se debe resolver cuando se tiene los datos.

Ejemplo 37. En cierto país se ha encontrado las siguientes relaciones:

Expectativas aumentadas de Phillips,

$$p = -3z + x + \frac{1}{6}.$$

Expectativas adaptativas de Phillips,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{4}(p - x).$$

Política monetaria

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{2}(m - p).$$

Se pide encontrar las trayectorias temporales de la tasa esperada de inflación $x(t)$, tasa de crecimiento de los precios $p(t)$ y la tasa de desempleo $z(t)$.

Solución. Tenemos las siguientes referencias

Datos del problema	Ecuaciones de referencia:
$p = \frac{1}{6} - 3z + x$	$\frac{P\prime}{P} = a - bz - Q + ux$
$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{4}(p - x)$	$\frac{dx}{dt} = v(\frac{P'}{P} - x)$
$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{2}(m - p)$	$\frac{dz}{dt} = -k\left(\frac{M\prime}{M} - \frac{P\prime}{P}\right).$

Comparando los parámetros asociados son: $a = \frac{1}{6}, b = 3,\ k = \frac{1}{2}, v = \frac{3}{4}, Q = 0,$ $u = 1$. Luego la ecuación a usar es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [bk + v(1-u)]\frac{dx}{dt} + vbkx = vbk\frac{M\prime}{M},$$

reemplazando los parámetros se obtiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}(1-1)\right]\frac{dx}{dt} + \frac{3}{4}(\frac{1}{2})(3)x = \frac{3}{4}(\frac{1}{2})(3)\frac{M\prime}{M},$$

es decir, la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{3}{2}\frac{dx}{dt}+\frac{9}{8}x=\frac{9}{8}\frac{M\prime}{M}.$$

La solución de la parte homogénea es

$$x_h(t)=\left[c_1cos\left(\frac{3}{4}t\right)+c_2sen\left(\frac{3}{4}t\right)\right]e^{-\frac{3}{4}t},$$

para encontrar la solución particular lo hacemos por coeficientes indeterminados, se asume como $x_p(t)=A$ y como $x'_p(t)=x''_p(t)=0$ resulta que $A=\frac{M\prime}{M}$, así $x_p(t)=\frac{M\prime}{M}$. Por tanto, la solución general es

$$x(t)=\left[c_1cos\left(\frac{3}{4}t\right)+c_2sen\left(\frac{3}{4}t\right)\right]e^{-\frac{3}{4}t}+\frac{M\prime}{M}.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3}{4}(p-x),$$

derivando la solución, luego igualando y despejando $p(t)$, resulta

$$p(t)=\left[c_2cos\left(\frac{3}{4}t\right)-c_1sen\left(\frac{3}{4}t\right)\right]e^{-\frac{3}{4}t}+\frac{M\prime}{M}.$$

similarmente de

$$p(t)=\frac{1}{6}-3z(t)+x(t)$$

se tiene $z(t)=\frac{1}{18}-\frac{1}{3}p(t)+\frac{1}{3}x(t)$,

que reemplazando aquí $p(t)$ y $x(t)$ se obtiene

$$z(t)=\frac{1}{18}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{4}t}\left[(c_1-c_2)cos\left(\frac{3}{4}t\right)+(c_2-c_1)sen\left(\frac{3}{4}t\right)\right].$$

PROBLEMAS 6.12

1. En cierto país se ha encontrado las siguientes relaciones:

Expectativas aumentadas de Phillips,

$$p=-2z+x+\frac{1}{4}.$$

Expectativas adaptativas de Phillips,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(p-x).$$

Política monetaria

$$\frac{dZ}{dt}=-(m-p).$$

Se pide encontrar las trayectorias temporales de la tasa esperada de inflación $x(t)$, tasa de crecimiento de los precios $p(t)$ y la tasa de desempleo $z(t)$.

R. $x(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}+\frac{M\prime}{M}$; $p(t)=e^{-t}(-c_1+2c_2-tc_2)+\frac{M\prime}{M}$; $z(t)=\frac{1}{8}+e^{-t}\big(c_1+c_2(t-1)\big)$.

***

CAPÍTULO 7

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

7.1 INTRODUCCIÓN

Uno de los teoremas que tiene importancia en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias es el *teorema de existencia y unicidad*. El motivo de su importancia está en que se dan ciertas condiciones iniciales, también es conocido como *problema de Cauchy*, entonces un problema de este tipo tiene dos elementos, la ecuación diferencial ordinaria y una condición inicial.
Consideremos el *Problema de Cauchy*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x), \ \ \forall x \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Antes de formular y analizar los teoremas concernientes a (1), daremos algunos ejemplos para luego enfocar el problema.

Ejemplo 1. Sea la ecuación Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x} \\ x(1) = 0 \end{cases}.$$

Vemos que $x(t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ es una solución constante, pero también lo es

$$x(t) = \begin{cases} 0, \ x < 1 \\ (x-1)^2, x \geq 1 \end{cases}'$$

ambas satisfacen la condición inicial, así el problema tiene al menos dos soluciones. ■

Ejemplo 2. Sea la ecuación Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

En este caso $x(t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ es una solución constante, pero también lo es

$$x(t) = \frac{1}{c-x}, c \in \mathbb{R}$$

también es solución de la ecuación diferencial, pero en la segunda solución no podemos encontrar $c \in \mathbb{R}$ tal que verifique $x(0) = 0$. ■

Ejemplo 3. Sea

$$\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt} = x + 1 \\ x(0) = -1 \end{cases}.$$

En este caso $x(t) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$ es una solución constante. Por otro lado, separando variables e integrando se obtiene

$$x(t) = -1 + ct, c \in \mathbb{R}.$$

Ambas satisfacen la condición inicial, por tanto, este problema de valor inicial tiene infinitas soluciones. ■

Ejemplo 4. Sea

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4\sqrt{x} \\ x(0) = -2 \end{cases}.$$

Aquí $x(t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ es una solución constante, sin embargo

$$x(t) = (2t + c)^2 ,$$

no tiene soluciones. Pues al ser $x(0) = -2$ no es posible satisfacer, puesto que la ecuación diferencial está definida sólo si $x \geq 0$. ■

Ejemplo 5. Sea

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4t \\ x(0) = 2 \end{cases}.$$

La ecuación diferencial tiene como solución

$$x(t) = t^2 + 2 ,$$

y es única.■

De estos ejemplos puede verse claramente que un problema de valor inicial o problema de Cauchy, puede no tener soluciones, tener más de una solución o tener exactamente una solución. Esta observación nos lleva a dos preguntas. ¿Bajo qué condiciones un problema de Cauchy tiene al menos una solución? Esto es un problema de existencia; ¿Bajo qué condiciones dicho problema tiene solución única? Esto es un problema de unicidad. A los teoremas que establecen dichas condiciones se les llama Teorema de Existencia y Unicidad.

PROBLEMAS 7.1

Analice la existencia y la unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales.

a) $\begin{cases} x' = 3t \\ x(0) = 3 \end{cases}.$

b) $\begin{cases} x' = 3\sqrt{x} \\ x(0) = -3 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt} = x - 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2\sqrt{x} \\ x(2) = 0 \end{cases}$.

e) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$.

7.2 TEOREMA DE PICARD

El método de *iteración de Picard* se utiliza para estudiar y analizar la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Es decir. Es decir, el método proporciona una técnica iterativa y aproxima soluciones, naturalmente no será muy sencillo, ya que después de la segunda iteración las integrales se vuelven cada vez más complicada.

El matemático alemán Rudolf Lipschitz (1832 – 1903), fue quien enunció una condición de la función $f(t,x)$ que son más fuertes que la continuidad en x; pero, más débil que la diferenciabildad con respecto a x. Naturalmente esta condición simplificó la teoría de Cauchy relacionada con la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación diferencial.

Explicación del método. Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \forall x \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (1)$$

siendo f continua en el rectángulo que contiene al punto (t_o, x_0). En (1) integramos en ambos miembros de la ecuación diferencial respecto t obtenemos,

$$x(t) = c + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds,$$

como $x(t_0) = x_0$ se tiene $x_0 = c + \int_{t_0}^{t_0} f\big(s, x(s)\big)ds$, entonces $c = x_0$. Por lo tanto,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds \qquad (2)$$

Por otro lado, si se parte de (2) se llega a (1); implica que (1) y (2) significa lo mismo. Considerando (2) se trata de resolver aplicando un método de aproximaciones sucesivas. Supongamos que $x_0(t)$ sea continua, se asume que

$x_0(t)$, y como $f(t, x_0(t))$ sólo depende de t, entonces da lugar la integración en (2),

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds$$

continuamos,

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds,$$

se asume que esta nueva función mejora la aproximación de la solución,

$$x_3(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s))ds.$$

Por tanto, lo que sigue es una sucesión de funciones $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots$, donde el n-ésimo término es

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))ds, n = 1,2,3, \ldots \qquad (3)$$

La aplicación reiterada del resultado (3) se denomina *método de iteración de Picard*. No es siempre evidente que la sucesión $\{x_n(t)\}$ converja a una función explícita.

Ejemplo 6. Resuelve el problema de valor inicial utilizando el método de Picard,

$$\frac{dx}{dt} = x + 1, x(0) = -2.$$

Solución. En este problema, vemos que $t_0 = 0, x_0 = -2$, entonces $x_0(t) = -2$ y $f\big(s, x_{n-1}(s)\big) = x_{n-1}(s) + 1$. De esta forma la ecuación (3) se transforma

$$x_1(t) = -2 + \int_0^t (x_0(s) + 1)ds = -2 + \int_0^t (-2 + 1)ds$$

$$= -2 - t\,,$$

$$x_2(t) = -2 + \int_0^t (x_1(s) + 1)ds = -2 + \int_0^t (-2 - t + 1)ds$$

$$= -2 - t - \frac{t^2}{2},$$

$$x_3(t) = -2 + \int_0^t (x_2(s) + 1)ds = -2 + \int_0^t \left(-2 - t - \frac{t^2}{2} + 1\right) ds$$

$$= -2 - t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!}\,,$$

$$x_4(t) = -2 + \int_0^t (x_3(s) + 1)ds$$

$$= -2 + \int_0^t \left(-2 - t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!} + 1\right) ds = -2 - t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!}\,,$$

Por inducción, se puede observar que el término enésimo de aproximación es

$$x_n(t) = -2 - t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} - \cdots - \frac{t^n}{n!},$$

$$= -1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!}\,.$$

Era de esperar este resultado explícita, esta sucesión $\{x_n(t)\}$ es fácil de entender cuando $n \to \infty$ y converja a $x(t) = -1 - e^t$. ■

Ejemplo 7. Utiliza el método de Picard y resuelve el problema

$$x' = t + x,\ \ x(0) = 1.$$

Solución. Como se trata de un problema de Cuachy, la ecuación es equivalente a

$$x(t) = 1 + \int_0^t (s + x(s) ds.$$

Esto nos puede servir para buscar una solución por aproximación. Definimos la sucesión

$$x_0(t) = 1$$

$$x_n(t) = 1 + \int_0^t (s + x_{n-1}(s))ds, n \geq 1,$$

evaluación sucesivamente

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t (s + x_0(s))ds = 1 + \int_0^t (s + 1)\, ds$$

$$x_1(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t (s + x_1(s))ds = 1 + \int_0^t \left(s + 1 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds,$$

$$x_2(t) = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3}$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t (s + x_2(s))ds = 1 + \int_0^t \left(s + 1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3}\right) ds$$

$$x_3(t) = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{12},$$

$$x_4(t) = 1 + \int_0^t (s + x_3(s))ds = 1 + \int_0^t \left(s + 1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{12}\right) ds$$

$$x_4(t) = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{12} + \frac{t^5}{60}.$$

Generalizando

$$x_n(t) = -x - 1 + 2\left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots\right]$$

tomando límite si $n \to \infty$, se tiene $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) = -t - 1 + 2e^t$. ■

Nota. $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$.

La convergencia es un serio problema a la hora de buscar la función solución. Las ecuaciones diferenciales no lineales es posible que no existan en todo el intervalo I que contiene a t; esto dificulta la convergencia de las iteraciones de Picard sobre la base $x_n(t)$ de $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f\big(x, x(s)\big)ds$.

Entonces la formalizar la idea donde converger, vamos a buscar un intervalo, un lugar donde podrían estar localizado todas las curvas de las iteraciones de Picard. Es decir $|x_n(t)| \leq M_1$ con M_1 constante. Veamos esto como un problema

Problema 1. Siendo $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ constante, talque

$$0 \leq t - t_0 \leq k_1, |x - x_0| \leq k_2.$$

Determine $k = \max_{(t,x) en \mathbb{R}} |f(t,x)|$ siendo $\beta = min\left\{k_1, \frac{k_2}{k}\right\}$. Por tanto,

$$|x_n(t) - x_0| \leq k|t - t_o|, \forall t[t_0, t_0 + \beta]\,. \qquad (1)$$

Solución. La desigualdad (1) con $n = 1,2,3,4, \ldots$, señala que la sucesión x_n está atrapado entre las rectas,

$$x - x_0 = k(t - t_0) \qquad \text{(a)}$$

y

$$x - x_0 = k(t - t_0) \qquad \text{(b)}$$

Estas dos rectas (a) y (b) pueden salir del rectángulo según se tomen el valor de t. Entonces tiene dos casos

Para $t = t_0 + \beta$ si $k_1 \leq \frac{k_2}{k}$ se observa en la figura 7.1.

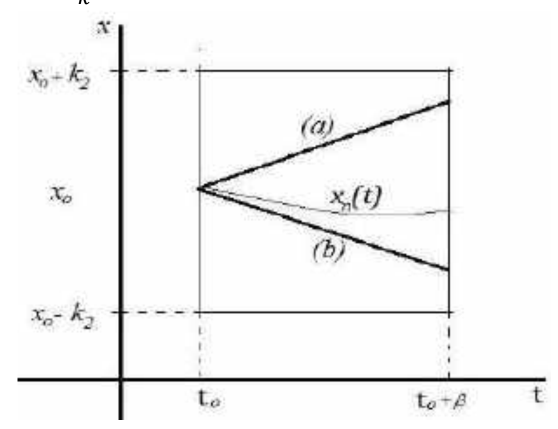


Figura 7.1: Caso en que $\beta = k_1$.

Para $t = t_0 + \frac{k_2}{k}$ si $k_1 > \frac{k_2}{k}$ se observa en la figura 7.2.

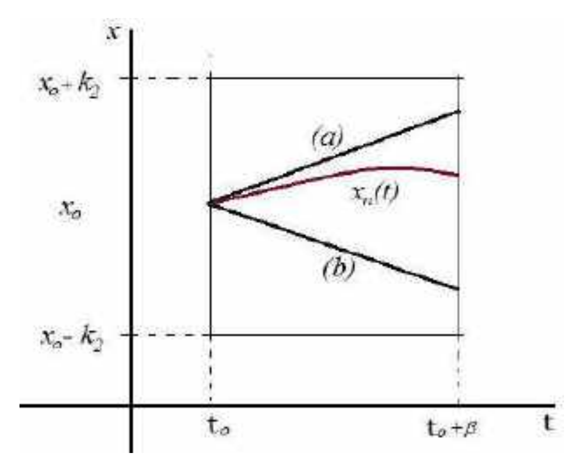


Figura 7.2: Caso en que $\beta = \frac{k_2}{k}$.

Esto se resume en que la gráfica de $x_n(t)$ se encuentra en el rectángulo para el intervalo $t \in [t_0, t_0 + \beta]$. Por tanto, para analizar (1) se puede utilizar inducción matemática para n. Veamos para $n = 0$, se cumple que $x_0(t) = x_0$.

Asumiendo que se cumple para $n = i$, verificamos que se cumple para $n = i + 1$. Es decir, como es cierto para

$$|x_i(t) - x_0| \leq K|t - t_0|$$

de manera que se deduce de inmediato

$$|x_{i+1}(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, x_i(s)ds\right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_i(s)|ds \leq k|t - t_0|, \forall t \in [t_0, t_0 + \beta].$$

Por lo tanto, se cumple $\forall\, n$, y queda demostrado. ■

Problema 2. Si

$$v(t) \leq L \int_{t_0}^{t} v(s)ds, \text{ con } v(t) > 0 \qquad (2)$$

entonces $v(t) = 0$.

Solución. En (2), podríamos derivar miembro a miembro, y ver qué sucede (estamos forzando la integración), entonces

$$\frac{dv(t)}{dt} \leq Lv(t),$$

que es lo miso decir

$$\frac{dv(t)}{dt} - Lv(t) \leq 0.$$

En el primer miembro de la desigualdad hay que verlo como si fuera una ecuación diferencial lineal, de manera que tiene el factor integrante $u(t) = e^{-L(t-t_0)}$ y multiplicando en ambos miembros se tiene

$$e^{-L(t-t_0)}\frac{dv(t)}{dt}-Le^{-L(t-t_0)}v(t)\leq 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left[e^{-L(t-t_0)}v(t)\right]\leq 0$$

de donde

$$e^{-L(t-t_0)}v(t)\leq c,$$

con c constante al ser $t=t_0, c=v(t_0)$, entonces

$$e^{-L(t-t_0)}v(t)\leq\ v(t_0).$$

Pero $v(t_0)$ tiene que ser nula, cuando $v(t)$ es positiva y cumple (2), es decir

$$e^{-L(t-t_0)}v(t)\leq 0,$$

de donde para que se cumpla debe ser $v(t)\equiv 0$. ■

PROBLEMAS 7.2

1. Determine las iteraciones de Picard para el problema de valor inicial $x'=tx+1, x(0)=0$. Halle la función a la cual converge.
2. Calcule las tres primeras iteraciones de Picard para el problema de valor inicial $\frac{dx}{dt}=2t^2+x^2, x(0)=1$.
3. Determine las primera cuatro iteraciones de Picard para el problema de valor inicial $\frac{dx}{dt}=2x^2+e^t, x(0)=0$.
4. Utiliza el método de aproximación de Picard para resolver el problema de valor inicial:
   a) $x'=x, x(0)=1$.
      R. $x(t)=e^t$.
   b) $x'=x-t, x(0)=1$.
   c) $\frac{dx}{dt}=x\ , x(t_0)=x_0$
      R. $x_n(t)=x_0\sum_{i=0}^{n}\frac{(t-t_0)^n}{n!}, x(t)=x_0e^{t-t_0}$.
   d) $\frac{dx}{dt}=tx, x(0)=1$.
   e) $\frac{dx}{dt}+tx=-t, x(0)=0$.
   f) $x'-x=e^t, x(0)=1$.
   g) $\frac{dx}{dt}=x^2, x(0)=0$.

7.3 FUNCIONES LIPSCHITZIANA

Definición 7.1. Sea $f: Ix\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $L > 0$. Se dice que f es globalmente Lipschitz con respecto a la segunda variable, con constante de Lipschitz L, si para cada $x, y \in \mathbb{R}$ y para cada $t \in I$ se tiene

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|.$$

Definición 7.2. una aplicación $f: V \subset Ix\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz en el conjunto abierto V, cuando un punto arbitrario $(t_0, x_o) \in V$, existe una constante $0 < L_0$ y un entorno $V_0 \subset V$ del punto (t_0, x_0) y que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L_0|x - y|, \forall (t_0, x), (t_0, y) \in V_0.$$

Es decir, una aplicación es localmente Lipschitz en un abierto V si es posible definir una constante de Lipschitz entorno a cualquier punto $(t_0, x_0) \in V$. Podría ocurrir que la constante de Lipschitz se extienda, es decir, que corra hacia el infinito en el intento se busca que V_0 cubra a todo V.

Observación. Los *espacios métricos* son el marco natural para la definición de las funciones de Lipschitz. Cuando requerimos ser más precisos, diremos que f *es una aplicación L-Lipschitz*. Cualquier aplicación L-Lipschitz con $L < 1$ es, por definición *L-contractiva*.

En el caso de una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la interpretación geométrica de las aplicaciones L-Lipschitz, su gráfica cumple,

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : x = f(t)\} \subset C(t_0, L),$$

donde

$$C(t_0, L) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : |x - f(t_0)| \leq L|t - t_0|\},$$

es un cono de vértice $\big(t_0, f(t_0)\big)$.

Ejemplo 8. La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t^2$, no es Lipschitz en toda la recta real. La prueba lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que es L-Lipschitz en $\mathbb{R}$, entonces para alguna constante $L > 0$, se tiene

$$|f(t) - f(x)| \leq L|t - t_0|, \forall t, x \in \mathbb{R},$$

en vista de que la función f es derivable en $\mathbb{R}$, sabemos que

$$\lim_{x \to t} \frac{|f(t) - f(x)|}{|t - x|} = |f'(t)|, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Combinando la desigualdad de la condición de L-Lipschitz con la identidad anterior, se obtiene

$$L \geq |f'(t)|, \forall t \in \mathbb{R}$$

lo cual es imposible, pues la derivada no está acotada, como se ve

$$\lim_{|t| \to \infty} |f'(t)| = \lim_{|t| \to \infty} |t| = +\infty. \blacksquare$$

Ejemplo 9. La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = |t|$, es (globalmente) 1-Lipschitz en toda la recta real, para verlo basta hacer

$$|f(t) - f(x)| = \big||t| - |x|\big| \leq 1.|t - x|, \forall t, x \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Ejemplo 10. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = 1 - |x|.$$

Analice si $f(t, x)$ es globalmente Lipschitz.

Solución. Siendo $f(t, x) = 1 - |x|$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, vemos que es continua con respecto a su primera variable. Entonces

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |1 - |x_1| - (1 - |x_2|)|$$
$$= \big||x_1| - |x_2|\big| \leq |x_1 - x_2|$$

de este modo se tiene la constante de Lipschitz $L = 1$. En consecuencia, para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ pasa una única curva integral. ■

PROBLEMA 7.3

1. Compruebe si la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ es Lipschitziana en el intervalo $]0,1[$.

   Solución. No es Lipschitz. Por reducción al absurdo. Supongamos que es L-Lipschitz en $]0,1[$ para alguna constante $L > 0$. Entonces f es derivable en $]0,1[$, pero vemos que

   $$L \geq |f'(t)|, \forall t \in]0,1[,$$

   lo cual es imposible, pues la derivada "explota" en el origen al $\lim_{t \to 0^+} f'(t) = +\infty$.

2. Sea la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = 1 + |x|$. Compruebe si $f(t, x)$ es globalmente Lipschitz.

7.4 TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Sea el problema de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x(t_0) = x_0 . \qquad \text{(PC)}$$

Teorema 7.1. Sea I un intervalo. Supongamos que $f: Ix\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua con respecto a su primer variable y globalmente Lipschitz con respecto a la segunda variable. Entonces para cada $t_0 \in I$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ existe una única solución global $x \in C^1(I)$ del problema de Cauchy (PC).

Definición 7.3. la solución definida en el rectángulo más grande donde existe la solución, se denomina solución maximal.

Ejemplo 11. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = 1 - |x| \, .$$

Analizamos la existencia de soluciones. Aquí la función es $f(t,x) = 1 - |x|$ es $f\colon \mathbb{R}x\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y es continua con respecto de la primera variable. Veamos que es globalmente Lipschitz con respecto de la segunda

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |1 - |x| - (1 - |y|)|$$
$$= \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

De esta forma, el teorema 7.1 garantiza que la solución existe en todo el intervalo de definición (para la primera variable), es decir por cada punto (t,x) del plano pasa una única curva integral. ■

Ejemplo 12. Sea el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = 3\sqrt{x}, x(t_0) = x_0.$$

Vemos que $f(t,x) = 3\sqrt{x}$ y $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$, ambas son continuas en $\mathbb{R}x]0,\infty[$, significa que tenemos que elegir (t_0, x_0) de modo que $x_0 > 0$, entonces hay existencia y unicidad local del problema de valor inicial y que se debe tomar (t_0, x_0) de modo que $t_0 \neq 0$. ■

Vamos reformular el teorema anterior para hacerlo comprensible la demostración básica.

Teorema 7.2. sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (3)$$

Si $f(t,x)$ y $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ son continuas en el rectángulo $t \in [t_0, t_0 + \beta]$, $|x - x_0| \leq k_2$. Entonces el problema de valor inicial (3) tiene una única solución en el intervalo $t \in [t_0, t_0 + \beta]$ (Barrera, 2012).

Demostración. Para la demostración trataremos de asociarlo con los problemas (1) y (2), para esto consideramos que sea

$$k = \max_{(t,x) en\, \mathbb{R}} |f(t,x)| \; y \; \beta = min\left\{k_1, \frac{k_2}{k}\right\}.$$

La prueba se traslada a demostrar que las iteraciones de Picard en $x_n(t)$, convergen $\forall t \in [t_0, t_0 + \beta]$ cuando $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ existe y es continua.

Entonces hay que trabajar con las sucesión de funciones $x_n(t)$ para ver su convergencia. Entonces escribimos la sucesión $x_n(t)$ como

$$x_n(t) = x_o(t) + [x_1(t) - x_o(t)] + [x_2(t) - x_1(t)] + \cdots + [x_n(t) - x_{n-1}(t)],$$
si el segundo miembro para $n = 1,2,3,4, \ldots$ converge, entonces $x_n(t)$ converge. Hay que hacer que

$$x_o(t) + [x_1(t) - x_o(t)] + [x_2(t) - x_1(t)] + \cdots + [x_n(t) - x_{n-1}(t)] + \cdots \quad (4)$$
converge. Es decir, que la serie infinita,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| < \infty, \qquad (5)$$
converge.

Tenemos que,

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| = \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))ds - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-2}(s))ds \right) \right|$$
$$= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-2}(s))ds \right|$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} \left| f(s, x_{n-1}(s)) - \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-2}(s)) \right| ds$$
$$= \int_{t_0}^{t} \frac{\left| f(s,x_{n-1}(s)) - \int_{t_0}^{t} f(s,x_{n-2}(s)) \right|}{|x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)|} |x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)| ds$$
$$= \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\partial f(s, \delta(s))}{\partial x} \right| |x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)| ds,$$
donde la función $\delta(s)$ está entre $x_{n-1}(s)$ y $x_{n-2}(s)$, según el problema 1, todos los puntos (s, $\delta(s)$) están en el rectángulo $R = \{(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2\colon\ t_0 \leq t \leq t_0 + \beta, |x - x_0| < k_2\}$, para $s < t_0 + \beta$. Luego

$$|x_2(t) - x_1(t)\ \ | \leq L \int_{t_0}^{t} |x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)\ |ds, t \in |t_0, t_0 + \beta| \qquad (6)$$
define la constante L.

De la ecuación (6) vamos a dar valores $n = 2,3,4, \ldots$ se obtiene

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq L \int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_0(s)| ds \leq L \int_{t_0}^{t} K(s - t_0)\, ds,\ \ x_0(s) = t_0$$
$$= KL \frac{(t-t_0)^2}{2!}$$
$$|x_3(t) - x_2(t)| \leq L \int_{t_0}^{t} |x_2(s) - x_1(s)| ds \leq L \int_{t_0}^{t} LK \frac{(t-t_0)^2}{2} ds$$
$$= KL^2 \frac{(t-t_0)^3}{3!},$$
continuando de la misma forma resulta

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq KL^{n-1} \frac{(t-t_0)^n}{n!}, \qquad (8)$$
en todo $t \in |t_0, t_0 + \beta|$. Entonces, la suma

$$|x_1(t) - x_0(t)| + |x_2(t) - x_1(t)| + |x_3(t) - x_2(t)| + \cdots \leq$$
$$\leq k(t - t_0) + KL \frac{(t-t_0)^2}{2!} + KL^2 \frac{(t-t_0)^3}{3!} + KL^3 \frac{(t-t_0)^4}{4!} + \cdots$$
como es $0 \leq t - t_0 \leq \beta$, en cada caso tomando la cota superior,

$$\leq k\beta + \frac{KL\beta^2}{2!} + \frac{KL^2\beta^3}{3!} + \frac{KL^3\beta^4}{4!} + \cdots$$
$$= \frac{K}{L}\left[\beta L + \frac{(\beta L)^2}{2!} + \frac{(\beta L)^3}{3!} + \frac{(\beta L)^4}{4!}\right]$$
$$= \frac{K}{L}\left[e^{\beta L} - 1\right],$$

de manera que $\frac{K}{L}\left(e^{\beta L} - 1\right) < \infty$. Significa que las iteraciones de Picard $x_n(t)$ convergen para $t \in |t_0, t_0 + \beta|$, de tal manera que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$. ■

Ahora probaremos que $x(t)$ cumple el problema de valor inicial, partimos del hecho que $x(t)$ verifica la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds \qquad (r_1)$$

y es continua. Por otro lado, las iteraciones de Picard $x_n(t)$ están definido como

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds, \qquad (r_2)$$

en la relación (r_2) tomamos límite en ambos miembros

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}(t) = \lim_{n\to\infty}\left[x_o + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds\right],$$
$$x(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds, \qquad (r_3)$$

donde

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds = \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds. \qquad (r_4)$$

Hay que probar (r_4), se tendría que demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds - \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds = 0.$$

En el rectángulo R para $t_0 + \beta \geq t$ la gráfica de $x(t)$ se encuentra dentro de este rectángulo, pues $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ y para todo $x_n(t)$ está en el rectángulo, luego

$$\left|\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds - \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_n(s)\big)ds\right| \leq \int_{t_0}^{t}\left|f\big(s, x(s)\big) - f\big(s, x_n(s)\big)\right|ds$$
$$\leq L\int_{t_0}^{t}|x(s) - x_n(s)|ds \text{, por (7).}$$

Por otro lado

$$x(s) - x_n(s) = \big(x_{n+1}(s) - x_n(s)\big) + \big(x_{n+2}(s) - x_{n+1}(s)\big) +$$
$$+\big(x_{n+3}(s) - x_{n+2}(s)\big) + \cdots = \sum_{i=n+1}^{\infty}\big(x_i(s) - x_{i-1}(s)\big)$$

ya que

$$x(s) = x_0 + \big(x_1(s) - x_0(s)\big) + \big(x_2(s) - x_1(s)\big) + \big(x_3(s) - x_2(s)\big) + \cdots$$
$$= x_0 + \sum_{i=1}^{n}\big(x_i(s) - x_{i-1}(s)\big)$$

Por tanto,

$$x_n(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{n}\big(x_i(s) - x_{i-1}(s)\big),$$

teniendo en cuenta (7) resulta

$$|x(s) - x_n(s)| \leq K\sum_{i=n+1}^{\infty} L^{i-1}\frac{(s-t_0)^i}{i!} \leq K\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{L^{i-1}\beta^i}{i!}$$

$$= \frac{K}{L}\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(L\beta)^i}{i!}. \qquad (r_5)$$

Es decir,

$$\left|\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds - \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_n(s)\big)ds\right| \leq L\left(\frac{K}{L}\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(L\beta)^i}{i!}\int_{t_0}^{t} ds\right),$$

$$\leq K\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(L\beta)^i}{i!}(t - t_0),\ t - t_0 < \beta$$

$$\leq K\beta\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(L\beta)^i}{i!},$$

donde $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(L\beta)^i}{i!} = 0$, pues el residuo del desarrollo de la serie de Taylor converge a $e^{\beta t}$, luego

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f\big(s, x_n(s)\big)ds = \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds,$$

de esta manera se cumple (r_1). ■

La continuidad de $x(t)$. Veamos $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ talque cumple

$$|x(t+h) - x(t)| < \varepsilon, \text{ si } |h| < \delta.$$

No sabemos cómo es $x(t+h)$ respecto de $x(t)$. Entonces hacemos

$$x(t+h) - x(t) = [x(h+t) - x_\lambda(t+h)] + [x_\lambda(t+h) - x_\lambda(t)]$$
$$+[x_\lambda(t) - x(t)],$$

siendo λ un entero relativamente grande. Así

$$\frac{K}{L}\sum_{i=\lambda+1}^{\infty}\frac{(L\beta)^i}{i!} < \frac{\varepsilon}{3},$$

de (r_4)

$$|x(h+t) - x_\lambda(t+h)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ y } |x_\lambda(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

siendo $t_0 + \beta > t$, y para h bastante pequeña $t_0 + \beta > t + h$. De esta forma se cumple que $x_\lambda(t)$ sería continua, pues resulta de λ integraciones sucesivas de funciones continuas. Por consiguiente puede elegirse $\delta > 0$ bastante pequeña talque

$$|x_\lambda(t+h) - x_\lambda(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ con } |h| < \delta.$$

Por tanto,

$$|x(h+t) - x(t)| \leq |x(t+h) - x_\lambda(t+h)| + |x_\lambda(t+h) - x_\lambda(t)| +$$
$$+|x_\lambda(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

para $|h| < \delta$. De esta manera que la solución $x(t)$ es continua de la integral (r_1), lo cual completa que $x(t)$ cumple el problema de valor inicial. ■

Se probó la existencia de al menos una solución $x(t)$ del problema de valor inicial. Ahora veamos la unicidad.

Supongamos que $y(t)$ es una segunda solución del problema. Es decir,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds \text{ y } y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds$$

son dos soluciones. Entonces

$$x(t) - y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds\right)$$
$$= \int_{t_0}^{t} [f(s, x(s) - f(s, y(s)]ds,$$

tomando barra,

$$|x(t) - y(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} [f(s, x(s) - f(s, y(s)]ds\right|$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} \left|f\big(s, x(s)\big) - f\big(s, y(s)\big)\right|ds$$
$$|x(t) - y(t)| \leq L \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)|ds \qquad \text{(p)}$$

donde

$$L = \max_{(t,x) en \, \mathbb{R}} \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|,$$

y que según el problema 2, la desigualdad (p) tiene que ser $|x(t) - y(t)| = 0$ de donde $x(t) = y(t)$, con esto se completa la prueba de que el problema de valor inicial tiene solución única y es $x(t)$. ■

Ejemplo 13. Se da el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = x^{\frac{1}{3}} sen(4t), x(0) = 0. \qquad (a_1)$$

Una solución de (a_1) es $x(t) = 0$. Puede obtenerse otras soluciones, al ser una ecuación separable, integrando

$$\int x^{-1/3}dx = \int sen(4t)dt + c$$
$$3x^{2/3} = sen^2(2t),$$

$c = 0$ con $x(0) = 0$, de donde $x(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{27}} sen^3(2t)$ son dos soluciones adicionales; ¿por qué tiene más de una solución? Veamos, si $f(t, x) = x^{\frac{1}{3}} sen(4t)$, se ve que

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{sen(4t)}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

no es continua en $x = 0$. ■

Ejemplo 14. Demuestre que el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + e^{-x^2},\ x(0) = 0,$$

existe en $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ en este intervalo $|x(t)| \leq 1$.

Solución. si $f(t,x) = t^2 + e^{-x^2}$ y que $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = -2xe^{-x^2}$. Entonces $f(t,x)$ y $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ son continuas en el rectángulo R: $\left[0, \frac{1}{3}\right] x[-1,1]$.

calculando

$$K = \max_{(t,x) en\ \mathbb{R}} \left(t^2 + e^{-x^2}\right) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9},$$

lo cual existe para

$$0 \leq t \leq min\left\{\frac{1}{3}, \frac{10}{9}\right\} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, en este intervalo se cumple $|x(t)| \leq 1$. ■

Ejemplo 15. Sea el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = 2 + x^2,\ x(0) = 0,$$

halle el intervalo máximo de existencia de solución.

Solución. Consideremos el rectángulo $t \in [0, k_1]$, $x \in [-k_2, k_2]$, hallamos

$$k = \max_{(t,x) en\ \mathbb{R}} (2 + x^2) = 2 + k_2^2,$$

Entonces $x(t)$ existe

$$0 \leq t \leq \beta = min\left\{k_1, \frac{k_2}{2 + k_2^2}\right\}. \ ■$$

PROBLEMA 7.4

1. Pruebe que el problema de valor inicial tiene solución única:
   a) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t^2 + x^2}$, $x(0) = x_0, x_0 > 0$.
   b) $x' = sen(tx), x(0) = x_0, x_0 > 0$.
   c) $x' = t^2 + x^2, x(0) = 0$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
2. En el teorema 7.4 muestre que $x_n(t)$ converge para $\forall t \in [t_0 - \beta, t_0]$, donde $\beta = min\left\{k_1, \frac{k_2}{r}\right\}$ y r es el valor máximo de $|f(t,x)|$ para (t,x) en el rectángulo $t_0 - k_1 \leq t \leq t_0$; $|x - x_0| < k_2$.
3. Demuestre que la solución $x(t)$ del problema de valor inicial existe:
   a) $\frac{dx}{dt} = sen^2(t) + x^2,\ x(0) = 0$.
   b) $\frac{dx}{dt} = 2t + x^2,\ x(0) = 0$.

c) $x' = 2x^2 + e^{-t^2},\ x(0) = 0.$

d) $x' = 2x^3 + e^{-4t},\ x(0) = 0.$

***

REFERENCIAS

Bard, E., Hamelin, B., Fairbanks, R. G., Zindler, A. 1990. *Calibration of the 14C scale over the past 30000 years using mass spectrometric U-Th ages from Barbados corals*. Nature vol. 345.

Barrera L. 2012. *Análisis Complejo y Ecuaciones Diferenciales*. Delta Publicaciones.

Bellod Redondo, José F. 2011. *La Función de Producción Cobb-Douglas y la Economía Española*. Universidad Politécnica de Cartagena.

Benites, Julio. *Pensamiento Matemático: de la antigüedad a nuestros días*. Universidad Politécnicas de Valencia, 2008.

Boyce W. y DiPrima R. 2005. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley.

Boyer, C. B. 1996. *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universitaria Textos.

Braun, M. *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamericana.

Chiang, A. C. y Wainwright, K. 2006. *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. McGraw-Hill. Pp. 532-537.

Coddington, E. A. and Levinson, N. 1973. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. México: compañía Editorial Continental, S. A.

Dennis G. Zill. 1988. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamericana, S. A.

Edwards, C. Henry y Penney, David E. 2009. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Pearson Educación, Cuarta Edición.

Guzman, M. de. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría de Estabilidad y Control*. Alhambra.

Hofmann, Joseph. 1960. *Historia de la Matemática*. México: Uteha.

Lambé, C. G. y Tranter C. J. 1964. *Ecuaciones Diferenciales para Ingenieros y Científicos*. México: Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.

Lima. Elon Lages. 1987. *Curso de Análisis, Volumen 1*. Río de Janeiro, Proyecto Euclides.

Lima E. 1998. *Algebra Lineal*. Textos del IMCA N° 2, Instituto de Matemática y Ciencias Afines.

Malthus, Thomas Robert. 1998. *Ensayo sobre el principio de la población*. México: FCE.

Margalef, R. 1998. *Ecología*. Madrid: Ediciones Omega.

Murray, J.D. 1993. *Mathematical Biology*. Berling: Biomathematics Texts. Pringer Verlag

Nagle R.K y Saft E.B. Fundamentos de ecuaciones diferenciales, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, segunda edición, 1999.

Nápoles, Juan y Segura, Carlos. 2002. *Historia de las ecuaciones diferenciales*. Revista Electrónica, Universidad de la Cuenca del Plata, Argentina.

Kells, L. M. 1991. *Ecuaciones Diferenciales Elementales*. México: McGraw-Hill.

Keseliov, A., Krasnov, M. y Makarenko, G. *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Mir.

Kline, M. 1994. *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días*, I, II, III. Madrid: Alianza Universidad.

Kreider, Donald L.; Kuller, Robert G. y Ostberg, Donald R. 1973. *Ecuaciones Diferenciales*. Fondo Educativo Interamericana, S.A.

Rainville, Earl D. 1874. *Ecuaciones Diferenciales Elementales*. México: Trillas.

Ross, S. L. 1992. *Ecuaciones Diferenciales*. España: Editorial Reverté, S.A.

Simmons, G. F. 1995. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*. México: McGraw-Hill.

Solow, Robert M. 1956. *A Contribution to the Theory of Economic Growth*. The Quarterly Journal of Economics, Vol. 70; The MIT Press.

Sotomayor, J. 1979. *Lições de Ecuações Diferenciais Ordinarias*. Proyecto Euclides, Instituto de Matemática Pura y Aplicada.

Sydsaeter, K. Hammond, P. 1996. *Matemáticas para el Análisis Económico*. Editorial Prentice Hall, p. 640.

Vera, Francisco. *20 Matemáticos Célebres*. Buenos Aires, 1959.

***

DR. ALBERTO ERNESTO GUTIÉRREZ BORDA



Licenciado en Educación Matemática, Magíster en Educación Matemática; Doctor en Educación y Doctor en "Education Mathematics" por AIU, la Florida, Estados Unidos. Docente de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional San Luis Gonzaga, Ica, Perú.

ISBN: 978-612-48816-3-3

9 786124 881633